Corrigé du Baccalauréat S Antilles-Guyane 18 juin 2010

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

Les justifications n'étaient pas demandées, elles sont données ici à titre purement pédagogique.

1. On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes.
Dans un tel jeu, il y a 8 piques et 4 as, dont l'as de pique, le nombre de cartes qui ne sont ni des as ni des piques est donc $32-(8+4-1)=21$. Comme il y a équiprobabilité sur les 32 cartes, la probabilité de n'obtenir ni un as, ni un pique, est donc égale à :
$$\frac{21}{32} \qquad \text{Réponse } \mathbf{B}$$
2. On tire au hasard et simultanément deux cartes d'un jeu de 32 cartes.
Il y a cette fois-ci équiprobabilité sur les $\binom{32}{2}$ façons de tirer simultanément 2 cartes parmi 32. La probabilité de n'obtenir ni un as, ni un pique, est donc égale à :
$$\frac{\binom{21}{2}}{\binom{32}{2}}=\frac{\frac{21\times 20}{2\times 1}}{\frac{32\times 31}{2\times 1}}=\frac{105}{248} \qquad \text{Réponses } \mathbf{A} \text{ et } \mathbf{B}$$
3. La durée d'attente à un guichet de service, exprimée en heure, suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0;1]$.
La probabilité que la durée d'attente d'une personne prise au hasard soit comprise entre 15 min (soit $\frac{1}{4}$ h) et 20 min (soit $\frac{1}{3}$ h) est, d'après le cours :
$$\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}{1-0}=\frac{1}{12} \qquad \text{Réponse } \mathbf{C}$$
4. On considère 10 appareils identiques, de même garantie, fonctionnant indépendamment les uns des autres. La probabilité pour chaque appareil de tomber en panne durant la période de garantie est égale à 0,15. On est donc dans le cadre d'un schéma de Bernoulli. Notons X le nombre d'appareils tombant en panne durant la période de garantie. Alors X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(10\,;\,0,15)$.
La probabilité pour qu'exactement 9 appareils soient en parfait état de marche à l'issue de la période de garantie est donc égale à celle qu'il y ait exactement 1 appareil en panne, soit :
$$p(X=1)=\binom{10}{1}0,15^1\times 0,85^9=10\times 0,15\times 0,85^9\simeq 0,35 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$
Réponses **A** et **D**.

EXERCICE 2 **5 points**
Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ d'unité 1 cm.

1. **Restitution organisée de connaissances**

   a. La relation (1) se traduit par $\left|z'-\omega\right|=|z-\omega|$, ou encore $\left|\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right|=1$.
   La relation (2) se traduit par : $\arg\left(\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right)=\theta\ (2\pi)$.

b. Le nombre complexe $\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}$ a pour module 1 et pour argument θ, on peut donc écrire, en utilisant la forme exponentielle, que : $\dfrac{z'-\omega}{z-\omega} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
On en déduit alors que $z'-\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z-\omega)$ d'où : $z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z-\omega)+\omega$.

2. L'équation : $z^2-4\sqrt{3}z+16=0$ a pour discriminant $\Delta=-16<0$. Il y a donc deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{4\sqrt{3}-4\mathrm{i}}{2} = 2\sqrt{3}-2\mathrm{i} \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = 2\sqrt{3}+2\mathrm{i}.$$

3. **a.** On a $b = 2\sqrt{3}+2\mathrm{i} = 4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$. On en déduit que $a=\overline{b}=4\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}$.

b. Voir figure 1.

c. Comme a et b sont conjugués, les points A et B sont symétriques par rapport à l'axe réel et l'on a donc $OA=OB=|a|=4$.
Par ailleurs $AB = \left|2\sqrt{3}+2\mathrm{i}-(2\sqrt{3}-2\mathrm{i})\right| = |4\mathrm{i}| = 4$.
Ainsi $OA=OB=AB$, le triangle OAB est donc équilatéral.

4. D'après la question 1 : $d = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}(c-0)+0 = \left(-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(-8\mathrm{i}) = 4\sqrt{3}+4\mathrm{i}$.

5. On constate que $d=2b$, autrement dit : $\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OB}$, ce qui signifie que D est l'image de B par l'homothétie de centre O et de rapport 2.

6. $OB=AB$ car le triangle OAB est équilatéral ; de même $BD=OB$ car B est le milieu de $[OD]$ (puisque $\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OB}$). On a donc $BO=BA=BD$ et les points O, B et D sont alignés, donc le point A appartient au cercle de diamètre $[OD]$ (et de centre B). Le triangle OAD est donc rectangle en A.
Autre méthode :

$$\left(\overrightarrow{AO}\ ;\ \overrightarrow{AD}\right) = \arg\left(\frac{d-a}{-a}\right) = \arg\left(\frac{2\sqrt{3}+6\mathrm{i}}{-2\sqrt{3}+2\mathrm{i}}\right) = \arg(-\mathrm{i}\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{2}\ (2\pi).$$

EXERCICE 2 **5 points**
Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Soit s une similitude indirecte d'écriture complexe $z' = a\overline{z}+b$. Soit C un point d'affixe c, D et E deux points d'affixes respectives d et e, distincts de C. Soient $C'=s(C)$, $D'=s(D)$, et $E'=s(E)$. Notons c', d' et e' les affixes respectives des points C', D' et E'. Alors (modulo 2π) :

$$\begin{aligned}
\left(\overrightarrow{C'D'}\ ;\ \overrightarrow{C'E'}\right) &= \arg\left(\frac{e'-c'}{d'-c'}\right) \text{ d'après la prop. 2}\\
&= \arg\left(\frac{a\overline{e}+b-a\overline{c}-b}{a\overline{d}+b-a\overline{c}-b}\right) \text{ d'après la prop. 1}\\
&= \arg\left(\frac{a\overline{(e-c)}}{a\overline{(d-c)}}\right)\\
&= \arg\left(\overline{\frac{e-c}{d-c}}\right)\\
&= -\arg\left(\frac{e-c}{d-c}\right)\\
&= -\left(\overrightarrow{CD}\ ;\ \overrightarrow{CE}\right).
\end{aligned}$$

Une similitude indirecte transforme donc un angle orienté en son opposé.

2. **a.** Voir figure 2.

b. $\mathscr{S}_1$ est la symétrie d'axe $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\right)$, son expression complexe est $z' = \overline{z}$.

3. **a.** $\mathscr{S}_2$ est une similitude directe, son écriture complexe est donc de la forme $z' = az+b$, avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. De plus $C' = \mathscr{S}_2(C_1)$ et $D' = \mathscr{S}_2(D_1)$ donc :

$$\left\{\begin{array}{rclr} 1+4\text{i} & = & 3a+b & L_1 \\ -2+2\text{i} & = & a(1+3\text{i})+b & L_2 \end{array}\right.$$

$L_1 - L_2$ donne : $3+2\text{i} = a(2-3\text{i})$, d'où $a = \dfrac{3+2\text{i}}{2-3\text{i}} = \dfrac{\text{i}(2-3\text{i})}{2-3\text{i}} = \text{i}$. En remplaçant a par i dans L_1 on a alors : $1+4\text{i} = 3\text{i}+b$ d'où $b = 1+\text{i}$. L'écriture complexe de $\mathscr{S}_2$ est donc : $z' = \text{i}z+1+\text{i}$.

b. La similitude directe $\mathscr{S}_2$ a pour :
- rapport : $k = |i| = 1$;
- angle $\alpha = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$;
- centre le point Ω d'affixe ω telle que : $\omega = \dfrac{1+\text{i}}{1-\text{i}} = \text{i}$.

(on peut remarquer que $\mathscr{S}_2$ n'est rien d'autre que le quart de tour direct de centre Ω).

4. Soit M un point quelconque d'affixe z, $M_1 = \mathscr{S}_1(M)$ d'affixe z_1 et $M' = \mathscr{S}_2(M_1)$ d'affixe z'.
D'après les questions précédentes : $z_1 = \overline{z}$ et $z' = \text{i}z_1+1+\text{i} = \text{i}\overline{z}+1+\text{i}$.
L'expression complexe de $\mathscr{S}$ est donc : $z' = \text{i}\overline{z}+1+\text{i}$.

a. $\mathscr{S}(C) = \mathscr{S}_2 \circ \mathscr{S}_1(C) = \mathscr{S}_2(C_1) = C'$.
De même, $\mathscr{S}(D) = \mathscr{S}_2 \circ \mathscr{S}_1(D) = \mathscr{S}_2(D_1) = D'$.

b. $h-c = \text{e}^{i\frac{\pi}{3}}(d-c)$ et $d \neq c$ donc : $\dfrac{h-c}{d-c} = \text{e}^{i\frac{\pi}{3}}$.
On en déduit que :
$\left(\overrightarrow{CD}\,;\,\overrightarrow{CH}\right) = \arg\left(\dfrac{h-c}{d-c}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ et que : $\dfrac{HC}{DC} = \left|\dfrac{h-c}{d-c}\right| = 1$ donc $DC = HC$.
Le triangle CDH est donc équilatéral direct.

c. $\mathscr{S} = \mathscr{S}_2 \circ \mathscr{S}_1$, or $\mathscr{S}_1$ est une similitude indirecte et $\mathscr{S}_2$ est une similitude directe, donc $\mathscr{S}$ est une similitude indirecte. Par ailleurs, dans cette similitude indirecte $\mathscr{S}$, le triangle équilatéral direct CDH a pour image $C'D'H'$. Ce dernier triangle est donc équilatéral indirect.

EXERCICE 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

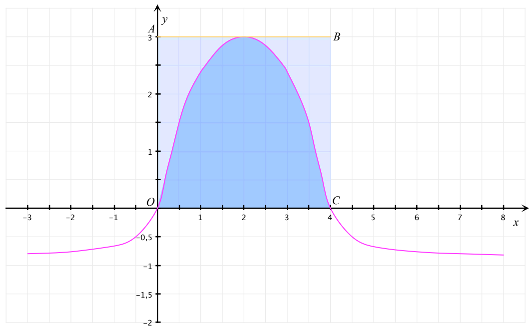
On définit la fonction F sur I, par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\text{d}t$.

1. **a.** $F(0) = \displaystyle\int_0^0 f(t)\,\text{d}t = 0$.

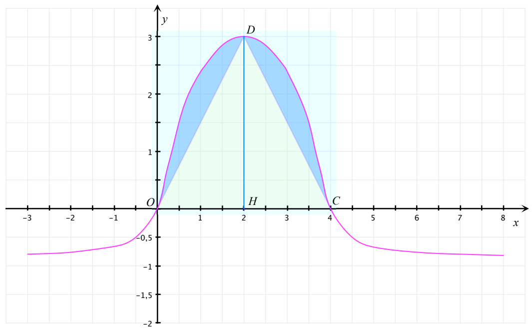
b.
- Soit $x \in [0\,;\,4]$. Sur l'intervalle $[0\,;\,x]$ la fonction f est positive donc, comme $0 \leqslant x$, d'après le cours : $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\text{d}t \geqslant 0$, c'est-à-dire $F(x) \geqslant 0$.
- Soit $x \in [-3\,;\,0]$. Sur l'intervalle $[x\,;\,0]$ la fonction f est négative donc, comme $x \leqslant 0$, on a : $\displaystyle\int_x^0 f(t)\,\text{d}t \leqslant 0$ d'où : $-\displaystyle\int_0^x f(t)\,\text{d}t \leqslant 0$.
  On a donc : $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\text{d}t \geqslant 0$, autrement dit $F(x) \geqslant 0$.

c. Sur l'intervalle $[0\,;\,4]$, la fonction f est positive, l'intégrale $\displaystyle\int_0^4 f(t)\,\text{d}t$ représente donc l'aire de la portion du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et les droites verticales d'équations

respectives $x = 0$ et $x = 4$ (en bleu sur la figure ci-dessous).
Par ailleurs, cette aire est inférieure à l'aire (mauve) du rectangle $OABC$, autrement dit : $F(4) \leqslant OA \times AB$, c'est-à-dire : $F(4) \leqslant 12$.



De même, l'aire $F(4)$ est supérieure à celle du triangle ODC de hauteur $[DH]$ (en jaune sur la figure ci-dessous) donc $F(4) \geqslant \dfrac{1}{2} \times DH \times OC$, c'est-à-dire $F(4) \geqslant 6$.



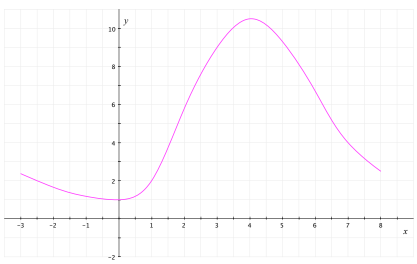
2. **a.** Soit $x \in I$. La fonction f est continue sur I, donc $F : x \longmapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ représente la primitive de f sur I qui s'annule en 0.

b. D'après ce qui précède, la fonction F est dérivable sur I et $F'(x) = f(x)$.
Le signe de $f(x)$ s'obtient par lecture graphique. On peut donc dresser le tableau de variation de F :

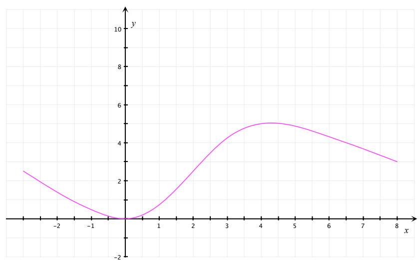
x	-3		0		4		8
Signe de $F'(x) = f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variation de f	$F(-3)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$F(4)$	$\searrow$	$F(8)$

3. On dispose de deux représentations graphiques sur I.

Courbe A



Courbe B



Les variations des courbes A et B sont en accord avec le tableau de variation précédent, cependant :

– La courbe A ne peut représenter la fonction F puisqu'on doit avoir $F(0) = 0$ ce qui n'est pas le cas pour la fonction représentée sur cette courbe.
– La courbe B ne peut représenter la fonction F puisqu'on doit avoir $6 \leqslant F(4) \leqslant 12$ ce qui n'est pas le cas pour la fonction représentée sur cette courbe.

EXERCICE 4 **6 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

1. Limite en 0.
D'après le théorème des croissances comparées $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$, donc, par opérations sur les limites : $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$.
Limite en $+\infty$.
On peut écrire, pour tout réel $x > 0$: $g(x) = x(1 - \ln x)$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - \ln x) = -\infty$, donc, par produit des limites : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

2. La fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ comme combinaison simple de fonctions qui le sont, et, pour tout $x > 0$:

$$g'(x) = 1 - \left(\ln x + x \times \frac{1}{x}\right) = -\ln x.$$

3. Soit $x > 0$, on sait que $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$; d'où le tableau de variations de g :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
g	$\Vert$ 0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Partie B

1. À l'aide de la calculatrice, on obtient les valeurs suivantes :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_n	2,718	1,847	0,744	0,213	0,047	00 865	0,001 78	0,000 178	0,000 002

On peut donc conjecturer que :

a. la suite (u_n) est décroissante ;

b. la suite (u_n) converge vers 0.

2. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n = \ln(u_n) = \ln\left(\frac{\mathrm{e}^n}{n^n}\right) = \ln\left(\mathrm{e}^n\right) - \ln\left(n^n\right) = n \ln \mathrm{e} - n \ln n = n - \ln n = g(n).$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $1 \leqslant n < n + 1$, et comme la fonction g est strictement décroissante sur $[1\,;+\infty[$, alors : $g(1) \geqslant g(n) > g(n+1)$ ce qui équivaut à $1 \geqslant v_n > v_{n+1}$. Ceci prouve que la suite (v_n) est décroissante.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \ln(u_n)$, donc $u_n = \mathrm{e}^{v_n}$. De plus, d'après la question précédente, $v_n > v_{n+1}$, donc par application de la fonction exponentielle (strictement croissante sur $\mathbb{R}$) : $\mathrm{e}^{v_n} > \mathrm{e}^{v_{n+1}}$, c'est-à-dire $u_n > u_{n+1}$ et la suite (u_n) est donc décroissante.

3. La suite (u_n) est postive de façon évidente, elle est donc minorée.
La suite (u_n) est décroissante, elle est donc majorée par son premier terme $u_1 = \mathrm{e}$.
La suite (u_n) est donc bornée.

4. La suite (u_n) est décroissante et minorée, elle est donc convergente.
Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \mathrm{e}^{v_n} = \mathrm{e}^{g(n)}$.
D'après la partie A, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} g(n) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{X \to -\infty} \mathrm{e}^X = 0$, donc, par composition des limites, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{g(n)} = 0$, ce qui prouve que la suite (u_n) a pour limite 0.

FIGURE 1 – Exercice 2 (non-spé)

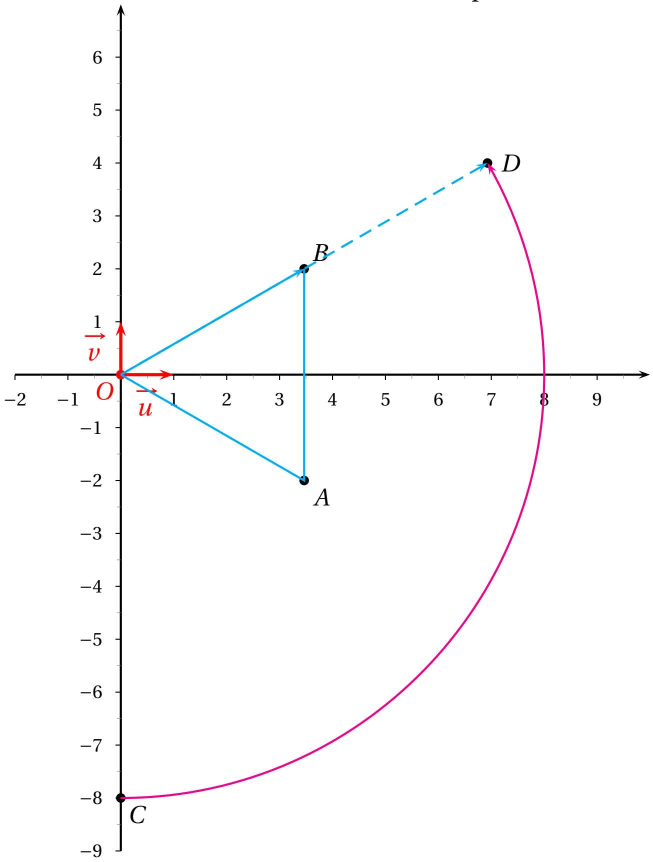


FIGURE 2 – Exercice 2 (spé)