

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat S Polynésie septembre 2007 ∞

EXERCICE 1

7 points

Commun à tous les candidats

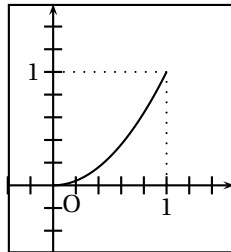
On désigne par (E) l'ensemble des fonctions  $f$  continues sur l'intervalle  $[0; 1]$  et vérifiant les conditions (P<sub>1</sub>), (P<sub>2</sub>) et (P<sub>3</sub>) suivantes :

- (P<sub>1</sub>) :  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[0; 1]$ .
- (P<sub>2</sub>) :  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 1$ .
- (P<sub>3</sub>) : pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0; 1]$ ,  $f(x) \leq x$ .

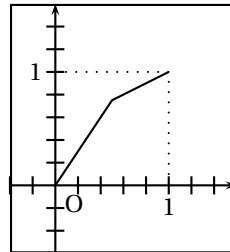
Dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan, on note  $(\mathcal{C}_f)$  la courbe représentative d'une fonction  $f$  de l'ensemble (E) et (D) la droite d'équation  $y = x$ .

À toute fonction  $f$  de (E), on associe le nombre réel  $I_f = \int_0^1 [x - f(x)] dx$ .

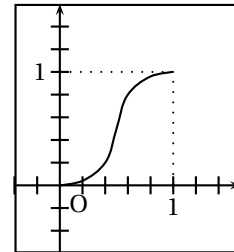
1. a. Une seule des trois courbes ci-dessous représente une fonction de (E). La déterminer en justifiant l'élimination des deux autres.



Courbe n° 1



Courbe n° 2



Courbe n° 3

- b. Montrer que, pour toute fonction  $f$  de (E),  $I_f \geq 0$ .

2. Soit  $h$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0; 1]$  par  $h(x) = 2^x - 1$ . (On rappelle que, pour tout  $x$  réel,  $2^x = e^{x \ln 2}$ ).

- a. Montrer que la fonction  $h$  vérifie les conditions (P<sub>1</sub>) et (P<sub>2</sub>).

- b. Soit  $\varphi$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0; 1]$  par  $\varphi(x) = 2^x - x - 1$ .

Montrer que, pour tout  $x$  de  $[0; 1]$ ,  $\varphi(x) \leq 0$ . (On pourra étudier le sens de variation de la fonction  $\varphi$  sur  $[0; 1]$ ).

En déduire que la fonction  $h$  appartient à l'ensemble (E).

- c. Montrer que le réel  $I_h$  associé à la fonction  $h$  est égal à  $\frac{3}{2} - \frac{1}{\ln 2}$ .

3. Soit  $P$  une fonction définie sur l'intervalle  $[0; 1]$  par  $P(x) = ax^2 + bx + c$  où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont trois nombres réels tels que  $0 < a < 1$ . On se propose de déterminer les valeurs des réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  pour que la fonction  $P$  appartienne à l'ensemble (E) et que  $I_P = I_h$ .

- a. Montrer que la fonction  $P$  vérifie la propriété (P<sub>2</sub>) si et seulement si, pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0; 1]$ ,  $P(x) = ax^2 + (1 - a)x$ .

Montrer que toute fonction  $P$  définie sur  $[0; 1]$  par  $P(x) = ax^2 + (1 - a)x$  avec  $0 < a < 1$  appartient à (E).

- b. Exprimer en fonction de  $a$  le réel  $I_P$  associé à la fonction  $P$ .

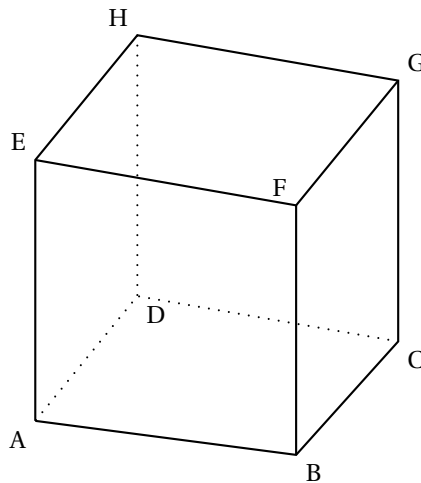
- c. Montrer qu'il existe une valeur du réel  $a$  pour laquelle  $I_P = I_h$ . Quelle est cette valeur ?

EXERCICE 2

4 points

Commun à tous les candidats

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 3.



On choisit le repère orthonormal  $(D; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  tel que  $\vec{i} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$ ,  $\vec{j} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$  et  $\vec{k} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DH}$ .

1.
  - a. Donner les coordonnées des points A, C et E.
  - b. Déterminer les coordonnées du point L barycentre du système  $\{(C; 2), (E; 1)\}$ .
  - c. Déterminer les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{AE}$  et  $\overrightarrow{DL}$ .
2. Soit  $(a, b)$  un couple de réels. On note M le point de la droite (AE) tel que  $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AE}$  et N le point de la droite (DL) tel que  $\overrightarrow{DN} = b\overrightarrow{DL}$ .
  - a. Montrer que le vecteur  $\overrightarrow{MN}$  est orthogonal aux vecteurs  $\overrightarrow{AE}$  et  $\overrightarrow{DL}$  si et seulement si le couple  $(a, b)$  vérifie le système 
$$\begin{cases} -a + 2b = 1 \\ 3a - b = 0 \end{cases}$$
  - b. En déduire qu'il existe un seul point  $M_0$  de (AE) et un seul point  $N_0$  de (DL) tels que la droite  $(M_0N_0)$  est orthogonale aux droites (AE) et (DL).
  - c. Déterminer les coordonnées des points  $M_0$  et  $N_0$  puis calculer la distance  $M_0N_0$ .

**EXERCICE 3****4 points****Commun à tous les candidats**

La végétation d'un pays imaginaire est composée initialement de trois types de plantes :

40 % sont de type A, 41 % de type B et 19 % de type C.

On admet qu'au début de chaque année :

- chaque plante de type A disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type A, B ou C.
- chaque plante de type B disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type A, B ou C.
- chaque plante de type C disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type C.

La probabilité qu'une plante de type A soit remplacée par une plante de même type est 0,6 et celle qu'elle le soit par une plante de type B est 0,3.

La probabilité qu'une plante de type B soit remplacée par une plante de même type est 0,6 et celle qu'elle le soit par une plante de type A est 0,3.

Au début de chaque année, on choisit au hasard une plante dans la végétation et on relève son type.

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on note :

- $A_n$  l'évènement « la plante choisie la  $n$ -ième année est de type A »,
- $B_n$  l'évènement « la plante choisie la  $n$ -ième année est de type B »,

- $C_n$  l'évènement « la plante choisie la  $n$ -ième année est de type C ».

On désigne par  $p_n$ ,  $q_n$  et  $r_n$  les probabilités respectives des évènements  $A_n$ ,  $B_n$  et  $C_n$ .

Compte tenu de la composition initiale de la végétation (début de l'année  $n^0$ ) on pose :  $p_0 = 0,40$ ,  $q_0 = 0,41$  et  $r_0 = 0,19$ .

1. Recopier sur la copie et compléter l'arbre pondéré ci-contre, en remplaçant chaque point d'interrogation par la probabilité correspondante. Aucune justification n'est demandée pour cette question.

2. a. Montrer que  $p_1 = 0,363$  puis calculer  $q_1$  et  $r_1$ .

- b. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,

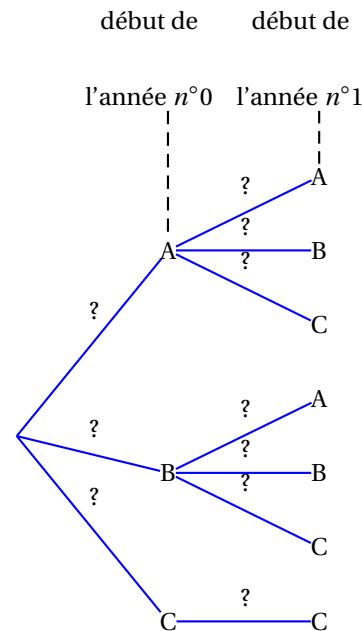
$$\begin{cases} p_{n+1} = 0,6p_n + 0,3q_n \\ q_{n+1} = 0,3p_n + 0,6q_n \end{cases}$$

3. On définit les suites  $(S_n)$  et  $(D_n)$  sur  $\mathbb{N}$  par  $S_n = q_n + p_n$  et  $D_n = q_n - p_n$ .

- a. Montrer que  $(S_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison. On admet que  $(D_n)$  est une suite géométrique de raison  $0,3$ .

- b. Déterminer les limites des suites  $(S_n)$  et  $(D_n)$ .

- c. En déduire les limites des suites  $(p_n)$ ,  $(q_n)$  et  $(r_n)$ .  
Interpréter le résultat.



**EXERCICE 4**

**5 points**

**Commun à tous les candidats**

Pour cet exercice, les figures correspondant aux parties A et B sont fournies sur la feuille jointe en annexe. Cette feuille ne sera pas remise avec la copie.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On considère un triangle OAB et une similitude directe  $\sigma$  de centre O, de rapport  $\lambda$  et d'angle  $\theta$ . Soit :

- les points  $A'$  et  $B'$ , images respectives des points A et B par la similitude  $\sigma$  ;
- les points I, milieu du segment  $[A' B]$  et J, milieu du segment  $[A B']$  ;
- le point M milieu du segment  $[AA']$  ;
- le point H, projeté orthogonal du point O sur la droite (AR) et le point  $H'$  image du point H par la similitude  $\sigma$ .

**Partie A. Étude d'un exemple**

Dans cette partie, le point A a pour affixe  $-6 + 4i$ , le point B a pour affixe  $2 + 4i$ , et le point H, projeté orthogonal du point O sur la droite (AB), a donc pour affixe  $4i$ .

La similitude  $\sigma$  est la similitude directe de centre O, de rapport  $\frac{1}{2}$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .

1. Déterminer les affixes des points  $A'$ ,  $B'$  et  $H'$ .
2. Montrer que la droite (IJ) est perpendiculaire à la droite  $(HH')$ .

**Partie B. Étude du cas général**

1.
  - a. Montrer que  $H'$  est le projeté orthogonal du point  $O$  sur la droite  $(A' B')$ .
  - b. Montrer que  $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ . On admet que  $\overrightarrow{MJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'B'}$ .
  - c. En déduire que  $\frac{MJ}{MI} = \frac{OH'}{OH}$  et que  $(\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MJ}) = (\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OH'}) + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .
2. On appelle  $s$  la similitude directe qui transforme  $M$  en  $O$  et  $I$  en  $H$ .  
On note  $K$  l'image du point  $J$  par la similitude  $s$ .
  - a. Montrer que  $OK = OH'$ , puis que  $(\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MJ}) = (\overrightarrow{OK}, \overrightarrow{OH'}) + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .
  - b. En déduire que le point  $H'$  est l'image du point  $J$  par la similitude  $s$ .
3. Montrer que  $(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{HH'}) = (\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{OH}) + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .  
Montrer que la droite  $(IJ)$  est perpendiculaire à la droite  $(HH')$ .

