

Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat S Métropole–La Réunion  
septembre 2007

EXERCICE 1

5 points

1. Restitution organisée de connaissances

P est vraie : il suffit de reprendre la définition du nombre dérivé de la fonction  $x^n$  en un point  $x_0$ . L'application du développement de  $(x_0 + h)^n$  par la formule du binôme permet de montrer que  $f'(x_0) = nx_0^{n-1}$ .

Q est fausse : on a ici la dérivée d'une fonction composée et  $f'(x) = nu'u^{n-1}$ .

2. a. Avec  $h(x) = g(\cos x)$ ,  $h'(x) = (\cos x)'g'(\cos x) = -\sin x \times \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} = \frac{-\sin x}{\sqrt{\sin^2 x}}$ .

Comme  $x \in ]-\pi ; 0[$ ,  $\sin x < 0$ , donc  $\sqrt{\sin^2 x} = -\sin x$ .

Finalement  $h'(x) = \frac{-\sin x}{-\sin x} = 1$ .

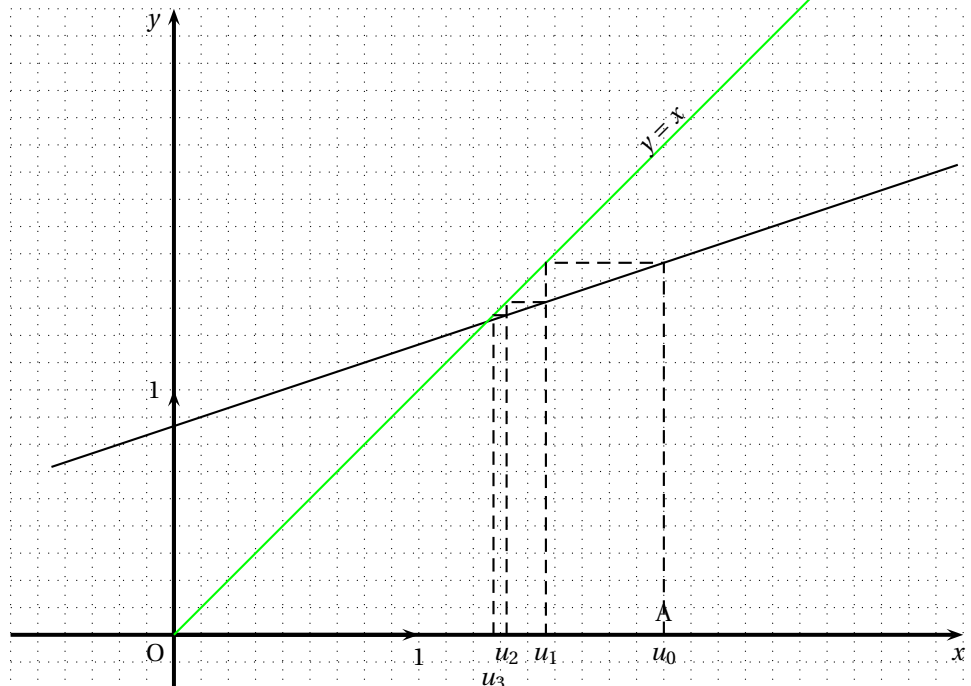
b.  $h'(x) = 1$  implique  $h(x) = x + k$ , avec  $k \in \mathbb{R}$ .

$h\left(-\frac{\pi}{2}\right) = g\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = g(0) = 0$ . Donc  $0 = -\frac{\pi}{2} + k \iff k = \frac{\pi}{2}$ .

Conclusion : sur  $]-\pi ; 0[$ ,  $h(x) = x + \frac{\pi}{2}$ .

EXERCICE 2

6 points



1. a.

b. Si la suite est convergente, alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$ .

La relation  $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{23}{27}$  donne par passage à la limite  $\ell = \frac{1}{3}\ell + \frac{23}{27} \iff \frac{2}{3}\ell = \frac{23}{27} \iff \ell = \frac{23}{18}$ .

c. Par récurrence :

- Initialisation :  $u_0 = 2 = \frac{36}{18} \geq \frac{23}{18}$ .
- Hérédité : supposons que  $u_n \geq \frac{23}{18}$  ; alors  $\frac{1}{3}u_n \geq \frac{1}{3} \times \frac{23}{18}$  soit  $\frac{1}{3}u_n \geq \frac{23}{54}$ .  
 Puis  $\frac{1}{3}u_n + \frac{23}{27} \geq \frac{23}{54} + \frac{23}{27} \iff u_{n+1} \geq \frac{3 \times 23}{3 \times 18} \iff u_{n+1} \geq \frac{23}{18}$ .  
 On a donc bien démontré que pour tout naturel  $n$ ,  $u_n \geq \frac{23}{18}$ .

d. Monotonie :

On la démontre par récurrence :

- Initialisation :  $u_0 = 2$  et  $u_1 = \frac{2}{3} + \frac{23}{27} = \frac{41}{27} < \frac{54}{27} = u_0$ . Donc  $u_0 > u_1$ .
- Hérédité :  
 Supposons qu'il existe un naturel  $p$  tel que  $u_{p-1} > u_p$ . Par croissance de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ , on a  $f(u_{p-1}) > f(u_p) \iff u_p > u_{p+1}$ .  
 Conclusion : on a démontré que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n > u_{n+1}$ .  
 La suite  $(u_n)$  est donc minorée et décroissante : elle est donc convergente ; on sait d'après ce qui précède que la limite de cette suite est  $\frac{23}{18}$ .

2. a. Soit  $S_n = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k}$ .

$$S_n = \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots + \frac{1}{10^{n+1}}$$

$$\frac{1}{10} S_n = \frac{1}{10^3} + \dots + \frac{1}{10^{n+1}} + \frac{1}{10^{n+2}}$$

Par différence on obtient  $\frac{9}{10} S_n = \frac{1}{10^2} - \frac{1}{10^{n+2}} = \frac{1}{10^2} \left( 10 - \frac{1}{10^n} \right) \iff$   
 $S_n = \frac{1}{90} \left( 10 - \frac{1}{10^n} \right)$ .

- b. On a  $v_1 = 1,2 + 7 \times \frac{1}{10^2}$  ;  $v_2 = 1,2 + 7 \left( \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} \right)$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n = 1,2 + 7 \left( \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots + \frac{1}{10^{2n+1}} \right) = 1,2 + 7 \times \frac{1}{90} \left( 10 - \frac{1}{10^n} \right)$ .  
 Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{10^n} = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1,2 + \frac{7}{90} = \frac{12}{10} + \frac{7}{90} = \frac{115}{90} = \frac{23}{18}$ . Cette limite est bien rationnelle.

3. Suites adjacentes ?

On a vu que la suite  $(u_n)$  est décroissante.

De plus  $v_{n+1} - v_n = \frac{7}{10^{n+2}} > 0$  : la suite  $(v_n)$  est donc croissante.

Enfin ces deux suites ont la même limite  $\frac{23}{18}$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$ .

Conclusion : ces deux suites sont adjacentes.

**EXERCICE 3**

**5 points**

1. On a  $Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{6}}{2 + 2i} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{(1 + i\sqrt{3})(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} =$   
 $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1 + \sqrt{3} - i + i\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} [1 + \sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 1)]$ .

2. Modules et arguments :

-  $|z_1|^2 = 2 + 6 = 8 \Rightarrow |z_1| = 2\sqrt{2}$ . On a donc  $z_1 = 2\sqrt{2} \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{3}}$ . Donc

$\arg(z_1) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$ .

- On a de même  $|z_2| = 2\sqrt{2}$ , puis  $z_2 = 2\sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$ .

Donc  $\arg(z_2) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$ .

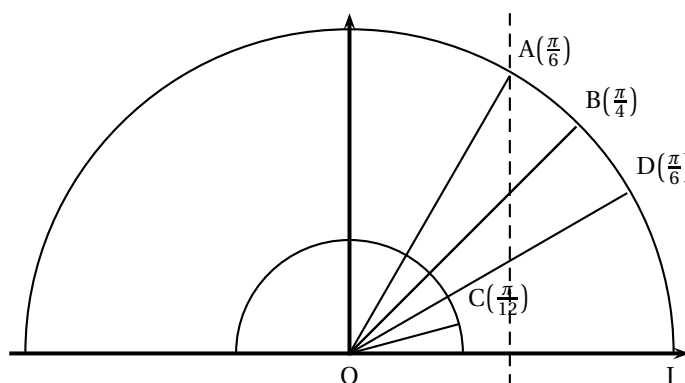
- Il suit  $Z = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} e^{i(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4})} = e^{i\frac{\pi}{12}}$ .

Donc  $|Z| = 1$  et  $\arg(Z) = \frac{\pi}{12} [2\pi]$ .

3. On déduit des deux questions précédentes que  $Z = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$  et par identification :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + \sqrt{3}) \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{3} - 1)$$

4. On place facilement le point B(2; 2) :



Le point A d'affixe  $z_1$  est obtenu en construisant la médiatrice du segment [OI].

Le point D est obtenu en construisant la bissectrice de  $\widehat{IOA}$ .

Le point C avec la bissectrice de  $\widehat{IOB}$  et le cercle de centre O et de rayon 1.

5. Le module :  $|Z^{2007}| = |Z|^{2007} = 1^{2007} = 1$ .

L'argument :  $\arg(Z^{2007}) = 2007 \times \frac{\pi}{12} = \frac{669\pi}{4} = \frac{672\pi - 3\pi}{4} = 2\pi - 3\frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$ .

On a donc  $Z^{2007} = e^{-\frac{3\pi}{4}} = \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**EXERCICE 3**

**5 points**

**Enseignement de spécialité**

1. a.

$a$	1	2	3	4	5	6
$y$	1	4	5	2	3	6

b. On vient de voir que  $5 \times 3 \equiv 1 \pmod{7}$  donc  $3x \equiv 5 \pmod{7} \iff 5 \times 3x \equiv 5 \times 5 \pmod{7}$  mais comme  $25 \equiv 4 \pmod{7}$  on a bien  $3x \equiv 5 \pmod{7} \iff x \equiv 4 \pmod{7}$ .

c. L'équation  $ax \equiv 0 \pmod{7}$  équivaut  $7 \mid ax$  mais comme 7 est premier avec a d'après le théorème de Gauss on a :  $7 \mid x$ .

2. a. Comme  $a \times a^{p-2} = a^{p-1}$  et que a n'est pas divisible par p, d'après le petit théorème de Fermat on a  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ , donc  $a^{p-1}$  est solution de l'équation  $ax \equiv 1 \pmod{p}$ .

b. On a  $r \equiv a^{p-2} \pmod{p}$  donc r est bien solution de l'équation  $ax \equiv 1 \pmod{p}$ .

Maintenant montrons l'unicité par l'absurde.

On suppose que deux entiers  $r_1$  et  $r_2$  de  $A_p$  sont solutions de l'équation.

On a  $ar_1 \equiv ar_2 \pmod{p} \iff a^{p-2} \times ar_1 \equiv a^{p-2} \times ar_2 \pmod{p} \iff r_1 \equiv r_2 \pmod{p}$ . Ainsi  $r_1 - r_2$  est un multiple de  $p$  mais  $r_1 - r_2$  est dans l'ensemble  $\{-(p-1); -(p-2); \dots; p-1\}$ , et le seul multiple de  $p$  dans cet ensemble est : 0 donc  $r_1 = r_2$ , ce qui montre l'unicité.

c. On a  $xy \equiv 0 \pmod{p}$  donc soit  $p \mid x$  soit  $p \mid y$  et  $x$  et  $y$  sont premiers entre eux et d'après le théorème de Gauss on a :  $p \mid y$ .

d. On sait que le reste de la division de  $2^{31-2}$  par 31 est l'unique solution de l'équation  $2x \equiv 1 \pmod{31}$ , or  $2^5 \equiv 1 \pmod{31}$  donc  $2^{25} \equiv 1 \pmod{31}$  ainsi  $2^{29} \equiv 2^4 \pmod{31}$ ,  $2^4 = 16$  est l'unique solution de de l'équation  $2x \equiv 1 \pmod{31}$  dans  $A_{31}$ .

On sait que le reste de la division de  $3^{31-2}$  par 31 est l'unique solution de l'équation  $3x \equiv 1 \pmod{31}$ . Xcas `irem(3^29, 31)` donne 21 (sinon faire tous les calculs jusqu'  $3^{29}$ ).

Pour la dernière équation, on factorise :

$$6x^2 - 5x + 1 = (2x - 1)(3x - 1) \text{ ainsi}$$

$$\begin{aligned} 6x^2 - 5x + 1 \equiv 0 \pmod{31} &\iff (2x - 1)(3x - 1) \equiv 0 \pmod{31} \\ &\iff (2x - 1) \equiv 0 \pmod{31} \text{ ou } (3x - 1) \equiv 0 \pmod{31} \end{aligned}$$

On sait donc que les solutions de ces deux dernières équations sont dans  $\mathbb{Z} : 16 + 31k$  et  $21 + 31k$  où  $k \in \mathbb{Z}$  d'après les deux équations précédentes.

**EXERCICE 4**

**5 points**

1.  $(E_0) : y' + y = 1 \iff y' = -y + 1 \iff y = C^{-x} + 1$  où  $C$  est une constante réelle.
2.  $f$  solution de (E)  $\iff f' + (1 + \tan x)f = \cos x$   
 Or  $f(x) = g(x) \cos x$ .  $f$  est dérivable sur  $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$  en tant que produit de fonctions dérivables  
 et  $f'(x) = g'(x) \cos x - g(x) \sin x$   
 Ainsi  $f$  solution de E  $\iff g' \cos x - g \sin x + (1 + \tan x)g \cos x = \cos x$   
 $\iff g' \cos x - g \sin x + \left(1 + \frac{\sin x}{\cos x}\right)g \cos x = \cos x$   
 $\iff g' \cos x - g \sin x + g \cos x + g \sin x = \cos x \iff (g' + g) \cos x = \cos x$   
 $\iff g' + g = 1$  car  $\cos x \neq 0$  pour  $x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$   
 $\iff g$  est solution de  $(E_0)$ .
3.  $f$  est solution de (E) donc  $G$  est solution de  $(E_0)$ . Or les solutions de  $(E_0)$  sont les fonctions du type  $x \mapsto C^{-x} + 1$  et ainsi, puisque  $f = g \cos x$ ,  $f = (C^{-x} + 1) \cos x$ .  
 De plus,  $f(0) = 0 \implies (C^0 + 1) \cos 0 = 0 \implies C = -1$   
 $f$  est donc la fonction définie sur  $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$  par  $f(x) = (-e^{-x} + 1) \cos x$