Correction du baccalauréat S Antilles-Guyane septembre 2009

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

VRAI OU FAUX

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée.

PARTIE A

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = (-1)^n$.

1. Vrai : la suite (u_n) est bien bornée, par -1 et 1.
2. Faux : la suite (u_n) n'a pas de limite quand n tend vers ∞.
3. Vrai : la suite de terme général $\dfrac{u_n}{n}$ converge vers 0, d'après le théorème des gendarmes.
4. Faux : une suite peut être à termes positifs (donc minorée) et décroissante, donc convergente, mais converger vers un autre nombre que 0 : par exemple, la suite de terme général $u_n = 1 + \dfrac{1}{n+1}$ est à termes positifs, décroissante et tend vers 1.

PARTIE B

1. Faux : A et B sont deux évènements indépendants avec $P(B) \neq 0$ et $P(B) \neq 1$, alors $P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B) \neq P_B(A)$.
2. Faux : X est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0\,;\,1]$, donc :
$P\left(X \in [0,1\,;\,0,6]\right) = 0,6 - 0,1 = 0,5$.
3. Vrai : X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres 100 et $\dfrac{1}{3}$.
$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \dbinom{100}{0}\left(\dfrac{1}{3}\right)^0\left(1 - \dfrac{1}{3}\right)^{100} = 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{100}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

On considère les points A$(1\,;\,-1\,;\,4)$, B$(7\,;\,-1\,;\,-2)$ et C$(1\,;\,5\,;\,-2)$.

1.
   a. On trouve $\overrightarrow{\text{AB}}\,(6\,;\,0\,;\,-6)$, $\overrightarrow{\text{AC}}\,(0\,;\,6\,;\,-6)$ et $\overrightarrow{\text{BC}}\,(-6\,;\,6\,;\,0)$.

   b. AB $= \sqrt{6^2 + 0^2 + (-6)^2} = 6\sqrt{2}$; AC $= \sqrt{0^2 + 6^2 + (-6)^2} = 6\sqrt{2}$ et
   BC $= \sqrt{(-6)^2 + 6^2 + 0^2} = 6\sqrt{2}$.
   AB = AC = BC $= 6\sqrt{2}$ donc le triangle ABC est équilatéral.

   c. $\vec{n}.\overrightarrow{\text{AB}} = 1 \times 6 + 1 \times 0 + 1 \times -6 = 0$ donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{\text{AB}}$.
   $\vec{n}.\overrightarrow{\text{AC}} = 1 \times 0 + 1 \times 6 + 1 \times -6 = 0$ donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{\text{AC}}$.
   $\vec{n}$ est un vecteur orthogonal à deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ non colinéaires du plan (ABC), donc $\vec{n}$ est orthogonal au plan (ABC).

   d. Le plan (ABC) a pour vecteur normal $\vec{n}$ et passe par A : il a pour équation cartésienne :
   $1.(x - x_A) + 1.\left(y - y_A\right) + 1.(z - z_A) = 0$ soit $x - 1 + x + 1 + z - 4 = 0$ qui donne :
   $x + y + z - 4 = 0$

2. Soit $\mathcal{D}$ la droite de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -2t \\ y & = & -2t-2 \quad \text{où} \quad t \in \mathbb{R}. \\ z & = & -2t-3 \end{array}\right.$$

a. La droite $\mathcal{D}$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}(-2\ ;\ -2\ ;\ -2) = -2\overrightarrow{n}$.
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ sont colinéaires, donc $\mathcal{D}$ est perpendiculaire au plan (ABC)

b. Soit G, intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan (ABC). Les cordonnées de G vérifient l'équation paramétrique de $\mathcal{D}$ et l'équation du plan ABC.
Par conséquent :
$(-2t) + (-2t-2) + (-2t-3) - 4 = 0$ qui donne $-6t - 9 = 0$ et donc : $t = -\dfrac{3}{2}$.
En remplaçant t par $-\dfrac{3}{2}$, on trouve que les coordonnées de G sont : $G(3\ ;\ 1\ ;\ 0)$.

c. $\dfrac{1}{3}(x_A + x_B + x_C) = \dfrac{9}{3} = 3 = x_G$; $\dfrac{1}{3}\left(y_A + y_B + y_C\right) = \dfrac{3}{3} = 1 = y_G$ et
$\dfrac{1}{3}(z_A + z_B + z_C) = \dfrac{0}{3} = 0 = z_G$.
Les coordonnées de l'isobarycentre de A, B et C sont celles de G donc G est l'isobarycentre de A, B et C.

3. Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre G passant par A.

a. Une équation cartésienne de la sphère $\mathcal{S}$ est :
$(x - x_G)^2 + \left(y - y_G\right)^2 + (z - z_G)^2 = R^2 = \text{GA}^2$ (puisque $\mathcal{S}$ passe par A), c'est-à-dire :
$(x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = \text{GA}^2$ avec $\text{GA}^2 = (1-3)^2 + (-1-1)^2 + (4-0)^2 = 24$.
Une équation cartésienne de $\mathcal{S}$ est donc : $(x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 24$

b. Les coordonnées des points d'intersection de la droite $\mathcal{D}$ et de la sphère $\mathcal{S}$ vérifient chacune des deux équations, donc sont solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{l} x = -2t \\ y = -2t-2 \\ z = -2t-3 \\ (x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 24 \end{array}\right.$$

On en déduit : $(-2t-3)^2 + (-2t-2-1)^2 + (-2t-3)^2 = 24$, donc $3(-2t-3)^2 = 24$ d'où $(-2t-3)^2 = 8$ qui s'écrit $(2t+3)^2 - (2\sqrt{2})^2 = 0$.
Après factorisation, on trouve : $t_1 = \dfrac{-3-2\sqrt{2}}{2}$ et $t_2 = \dfrac{-3+2\sqrt{2}}{2}$.
On en déduit les coordonnées des deux points :
Pour $t_1 = \dfrac{-3-2\sqrt{2}}{2}$: $\text{E}\left(3+2\sqrt{2}\ ;\ 1+2\sqrt{2}\ ;\ 2\sqrt{2}\right)$.
Pour $t_2 = \dfrac{-3+2\sqrt{2}}{2}$: $\text{F}\left(3-2\sqrt{2}\ ;\ 1-2\sqrt{2}\ ;\ -2\sqrt{2}\right)$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

On considère la surface S_1 d'équation $z = x^2 + y^2$, et la surface S_2 d'équation $z = xy + 2x$.

PARTIE A

1. **a.** E_1 est l'intersection de $\mathscr{P}$ et de S_1. les coordonnés d'un point quelconque de E_1 vérifient donc le système :
$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x = 2 \end{cases}$ qui équivaut à $\begin{cases} x = 2 \\ z = y^2 + 4 \end{cases}$.
Dans le plan $\mathscr{P}$, $z = y^2 + 4$ est l'équation d'une parabole.

   b. E_2 est l'intersection de $\mathscr{P}$ et de S_2. les coordonnés d'un point quelconque de E_2 vérifient donc le système :
$\begin{cases} z = xy + 2x \\ x = 2 \end{cases}$ qui équivaut à $\begin{cases} x = 2 \\ z = 2y + 4 \end{cases}$.
E_2 est donc une droite dans le plan $\mathscr{P}$

2. **a.** voir figure à la fin de l'exercice

   b. Les coordonnées des points d'intersection B et C des ensembles E_1 et E_2 vérifient le système :
$$\begin{cases} x = 2 \\ z = x^2 + y^2 \\ z = 2y + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ z = y^2 + 4 \\ y^2 + 4 = 2y + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ z = 2y + 4 \\ y(y-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ z = y^2 + 4 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 2 \\ z = y^2 + 4 \\ y = 2 \end{cases}.$$
On obtient deux points : B(2 ; 0 ; 4) et C(2 ; 2 ; 8)

PARTIE B

1. **a.** $M \in S_1 \cap S_2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = xy + 2x$ c'est-à-dire $y^2 - xy = 2x - x^2$
d'où $= y(y - x) = x(2 - x)$.

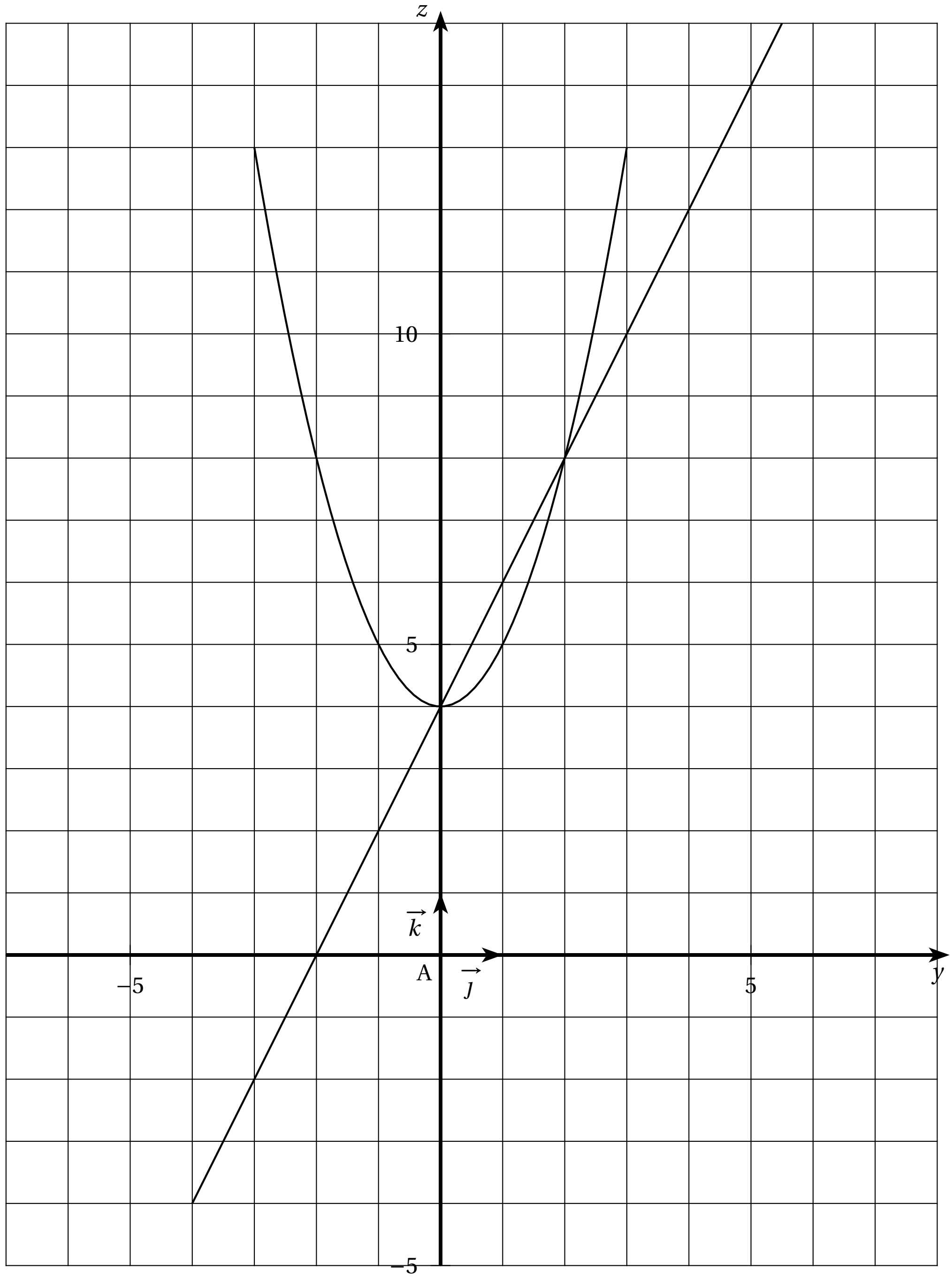
   b. x est premier ; il divise $x(2 - x)$ donc divise $y(y - x)$.
Soit il divise y, soit il divise $y - x$. Mais s'il divise $y - x$, il divise $(y - x) + x$ donc y.
On en déduit que x divise y.

2. On pose $y = kx$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

   a. $y(y - x) = x(2 - x)$ s'écrit alors $kx(kx - x) = x(2 - x)$, donc $kx^2(k - 1) = x(2 - x)$.
x est premier donc non nul ; on peut simplifier par x.
On obtient alors : $kx(k - 1) = 2 - x$.
x est premier, divise $kx(k - 1)$, donc divise $2 - x$. Comme il divise aussi x, il divise la somme $(2 - x) + x = 2$. x divise donc 2.
x est un diviseur de 2 et est premier, donc $x = 2$.

   b. Avec $x = 2$, l'égalité $kx(k - 1) = x(2 - x)$ donne $k(k - 1) = 0$. On en déduit $k = 0$ ou $k = 1$.

3. Pour $k = 0$, on obtient comme coordonnées (2 ; 0 ; 4) qui sont les coordonnées du point B.
Pour $k = 1$, on obtient comme coordonnées (2 ; 2 ; 8) qui sont les coordonnées du point C.
Ainsi retrouve-t-on les résultats de la première partie, question 2.b.



EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

1. Le figure complète est à la fin de l'exercice.
2. $\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \dfrac{-8+8\text{i}}{8+8\text{i}} = \dfrac{-1+\text{i}}{1+\text{i}} = \dfrac{\text{i}(1+\text{i})}{1+\text{i}} = \text{i}$.

   On en déduit : $\dfrac{\text{BA}}{\text{BC}} = \left|\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right| = |\text{i}| = 1$ donc BA = BC.

   $\left(\overrightarrow{\text{BC}}\,;\ \overrightarrow{\text{BA}}\right) = \arg\left(\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right) = \arg(\text{i}) = \dfrac{\pi}{2}$.

   On en déduit que le triangle ABC est rectangle isocèle en B.

3. L'écrire complexe de la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ est : $z' = z_{\text{B}} = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}\left(z - z_{\text{B}}\right)$, c'est-à-dire : $z' = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}\left(z - z_{\text{B}}\right)) + z_{\text{B}} = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}(z + 3 + 4\text{i}) - 3 - 4\text{i}$.

E est l'image de C par cette rotation, donc :

$z_{\text{E}} = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}(5 + 4\text{i} + 3 + 4\text{i}) - 3 - 4\text{i} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\text{i}\right)(8 + 8\text{i}) - 3 - 4\text{i} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times 8(1 + \text{i})^2 - 3 - 4\text{i}$

$= 4\sqrt{2} \times 2\text{i} - 3 - 4\text{i} = -3 + \left(8\sqrt{2} - 4\right)\text{i}$.

4. L'écriture complexe de l'homothétie $\mathscr{H}$ est :

$z' - z_{\text{B}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(z - z_{\text{B}}\right)$ donc $z' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(z - z_B\right) + z_B$.

On en déduit : $z_{\text{F}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(-3 + (8\sqrt{2} - 4)\text{i} + 3 + 4\text{i}\right) - 3 - 4\text{i} = \sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times (8\sqrt{2}\text{i}) - 3 - 4\text{i}$

$= 8\text{i} - 3 - 4\text{i} = -3 + 4\text{i}$ donc $z_F = -3 - 4\text{i}$.

$z_{\text{F}} = \dfrac{1}{2}\left(z_{\text{A}} + z_{\text{C}}\right)$ donc F est le milieu de [AC] ; or, ABC est un triangle rectangle en B.

Par conséquent, F est le milieu de l'hypoténuse du triangle rectangle ABC, donc le centre de son cercle circonscrit.

5. Les droites (EC) et (DF) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès appliqué auc triangles BDF et BEC, $\dfrac{\text{BE}}{\text{BC}} = \dfrac{\text{BD}}{\text{BF}}$ donc F est l'image de C par l'homothétie $\mathscr{H}$.

On a alors : $\overrightarrow{\text{BD}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{\text{BE}}$ et $\overrightarrow{\text{BF}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{\text{BC}}$.

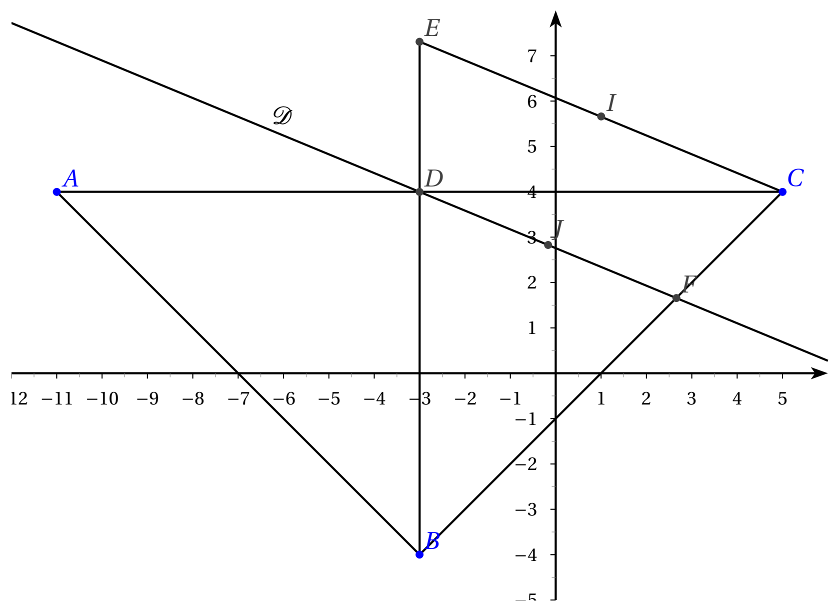
Par définition, I est le milieu de [DF].

On en déduit :

$\overrightarrow{\text{BI}} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{\text{BD}} + \overrightarrow{\text{BF}}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{\text{BE}} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{\text{BC}}\right) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\overrightarrow{\text{BE} + \text{BC}}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{\text{BE}} + \overrightarrow{\text{BC}}\right)\right) =$

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{\text{BI}}$.

On a donc : $\overrightarrow{\text{BJ}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{\text{BI}}$: J est l'image de I par l'homothétie $\mathscr{H}$ donc B, I et J sont alignés.



EXERCICE 4 **6 points**
Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0~;~1]$ par :

$$f(x) = 1 + x\ln x.$$

1. **a.** D'après les formules de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

b. Pour tout $x \in]0~;~1]$, $\ln x \leqslant 0$ donc $x\ln x \leqslant 0$ et $f(x) = 1 + x\ln x \leqslant 1$.

2. **a.** f est dérivable comme somme et produit de fonctions dérivables sur $]0~;~1]$.
Pour tout $x \in]0~;~1]$, $f'(x) = 0 + 1 \times \ln x + x \times \dfrac{1}{x} = 1 + \ln x$; $f'(x) = 1 + \ln x$.

b. L'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}$ en 1 est : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$; $f'(1) = 1$ et $f(1) = 1$.
Cette équation est donc : $y = (x-1) + 1$ soit : $y = x$.
Cette tangente est donc T.

3. On note g la fonction définie pour tout nombre réel $x \in]0~;~1]$ par

$$g(x) = 1 + x\ln x - x.$$

a. g est dérivable sur $]0~;~1]$ comme somme de fonctions dérivables.
Pour tout $x \in]0~;~1]$, $g(x) = f(x) - x$ donc $g'(x) = f'(x) - 1 = \ln x$.

b. Pour tout $x \in]0~;~1]$, $\ln x \leqslant 0$ donc $g'(x) \leqslant 0$. On en déduit que g est décroissante sur $]0~;~1]$. Or $g(1) = 0$.
Par conséquent, $g(x) \geqslant 0$ sur $]0~;~1]$.
On en déduit que $\mathscr{C}$ est au-dessus de T sur $]0~;~1]$.

4. Soit α un nombre réel tel que $0 < \alpha < 1$.
On pose $I(\alpha) = \displaystyle\int_\alpha^1 \left[1 - f(x)\right]\,\mathrm{d}x$.

a. On a donc $I(\alpha) = \displaystyle\int_\alpha^1 -x\ln x\,\mathrm{d}x = -\int_\alpha^1 u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$ en posant $\left\{\begin{array}{l} u'(x) = x \\ v(x) = \ln x \end{array}\right.$.
v est dérivable sur $[\alpha~;~1]$ et u' et v' sont continues sur l'intervalle $[\alpha~;~1]$.
On peut donc utiliser la formule d'intégration par parties.

$\displaystyle\int_\alpha^1 u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)] - \int_\alpha^1 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$ avec $\left\{\begin{array}{l} u(x) = \dfrac{x^2}{2} \\ v'(x) = \dfrac{1}{x} \end{array}\right.$.

Par conséquent : $\displaystyle\int_\alpha^1 u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_\alpha^1 - \int_\alpha^1 \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

$\displaystyle = -\frac{\alpha^2}{2}\ln\alpha - \int_\alpha^1 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\alpha^2}{2}\ln\alpha - \left[\frac{x^2}{4}\right]_\alpha^1 = -\frac{\alpha^2}{2}\ln\alpha - \left(\frac{1}{4} - \frac{\alpha^2}{4}\right)$.

Finalement : $I(\alpha) = -\left[-\dfrac{\alpha^2}{2}\ln\alpha - \left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{\alpha^2}{4}\right)\right] = \dfrac{\alpha^2}{2}\ln\alpha + \dfrac{1}{4} - \dfrac{\alpha^2}{4}$.

b. D'après les formules des croissances comparées, $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\alpha^2}{2}\ln\alpha = 0$; $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\alpha^2}{4} = 0$ donc $\lim\limits_{\alpha\to 0} I(\alpha) = \dfrac{1}{4}$.

c. On en déduit que l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $y = 1$ est égale à $\dfrac{1}{4}$ unité d'aire (hachurée sur le dessin ci-dessous).

d. Pour calculer l'aire demandée, il faut calculer l'aire du triangle formé par la droite T, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $y = 1$; elle vaut $\dfrac{1}{2}$.

On lui soustrait l'aire calculée précédemment : $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$.
L'aire du domaine (en gris sur le dessin ci-dessous) compris entre la courbe $\mathscr{C}$, la droite T et l'axe des ordonnées vaut $\dfrac{1}{4}$ unité d'aire.