

∞ Corrigé du baccalauréat S Antilles-Guyane ∞
septembre 2007

EXERCICE 1

6 points

Commun à tous les candidats

Partie A

$n = 3, b = 7, r = 5.$

$$p(G) = p(nn) + p(bb) + p(rr) = \frac{3}{15} \times \frac{2}{14} + \frac{7}{15} \times \frac{6}{14} + \frac{5}{15} \times \frac{4}{14} = \frac{6 + 42 + 20}{15 \times 14} = \frac{68}{210} = \frac{34}{105}.$$

Partie B

1. $g(n, b, r) = \frac{n}{15} \times \frac{n-1}{14} + \frac{b}{15} \times \frac{b-1}{14} + \frac{r}{15} \times \frac{r-1}{14} = \frac{1}{210} [n(n-1) + b(b-1) + r(r-1)].$

2. a. L'équation du plan NBR est $ax + by + cz + d = 0$. En écrivant que N, B et R appartiennent à ce plan, on trouve $15a + d = 0, 15b + d = 0, 15c + d = 0$, soit $a = -\frac{d}{15} = b = c$.

En prenant $d = 15$, on trouve qu'une équation du plan (NBR) est $x + y + z - 15 = 0$.

b. On sait que $n + b + r = 15 \iff M \in (\text{NBR})$.

c. $g(n, b, r) = \frac{1}{120} [n^2 - n + b^2 - b + r^2 - r] = \frac{1}{120} [n^2 + b^2 + r^2 - (n + b + r)] = \frac{1}{120} [OM^2 - 15]$. (puisque $n + b + r = 15$ d'après le b.)

d. Le vecteur \overrightarrow{OH} est un vecteur normal au plan (NBR), donc a pour coordonnées $(\alpha; \alpha; \alpha)$ qui sont aussi les coordonnées du point H. Or $H \in (\text{NBR}) \iff \alpha + \alpha + \alpha = 15 \iff 3\alpha = 15 \iff \alpha = 5$. Conclusion $H(5; 5; 5)$.

e. On sait que la distance minimale du point O à un point du plan (NBR) est la distance de O au projeté orthogonal de O sur ce plan soit H. On a vu que $g(n, b, r) = \frac{1}{120} [OM^2 - 15]$. Cette probabilité est minimale quand $M = H$. Dans ce cas $g(n, b, r) = \frac{1}{120} [OH^2 - 15] = \frac{1}{120} [5^2 + 5^2 + 5^2 - 15] = \frac{60}{210} = g_{\text{mini}}(n, b, r) = \frac{2}{7}$.

Partie C

1. On a $p(G) = \frac{2}{7}$. Si deux boules de même couleur sortent il touche kx et dans le cas contraire le « gain » sera de $-x$. Donc $E(X) = \frac{2}{7}(kx - x) + \frac{5}{7} \times (-x) = \frac{x}{7}(2k - 7)$.

2. Le jeu est équitable si $E(x) = 0 \iff \frac{x}{7}(2k - 7) \iff k = \frac{7}{2} = 3,5$.

EXERCICE 2

5 points

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

$$1. \alpha \text{ est tel que } \begin{cases} \alpha(1+i) = 1+3i \\ i\alpha^2 = -4+3i \end{cases}$$

La première égalité donne $\alpha = \frac{1+3i}{1+i} = 2+i$.

On a bien $i(2+i)^2 = i(4-1+4i) = -4+3i$.

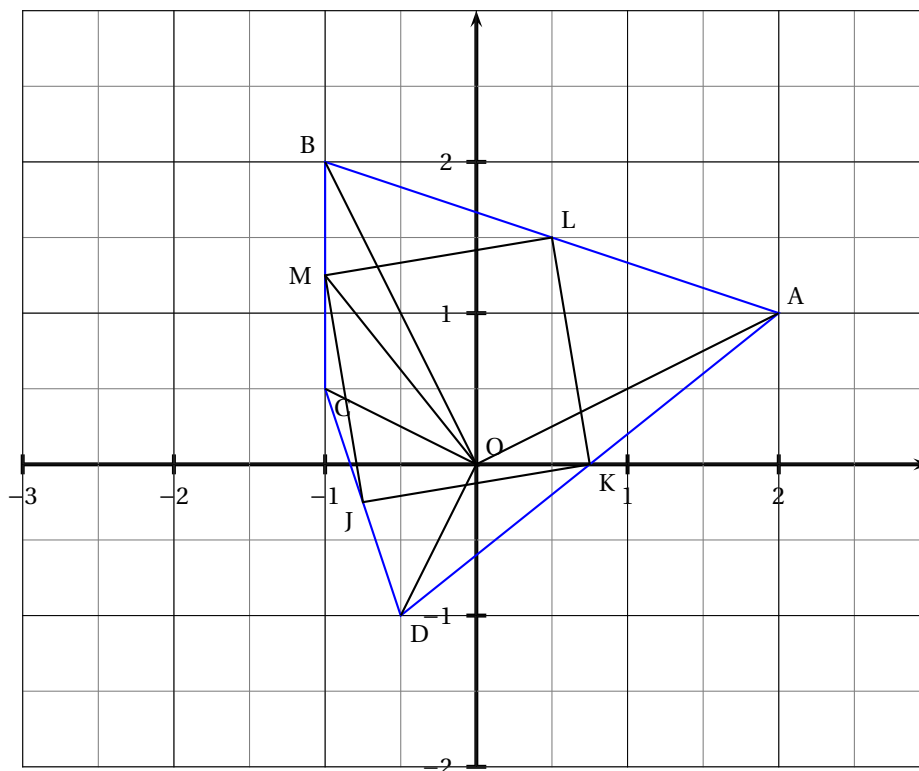
$$2. \text{ Pour tout nombre complexe } z, \text{ on pose } f(z) = z^2 - (1+3i)z + (-4+3i). \\ \text{Développons } (z-\alpha)(z-i\alpha) = z^2 - i\alpha z - \alpha z + i\alpha^2 = z^2 - \alpha z(1+i) + i\alpha^2 = \\ z^2 - (1+3i)z - 4 + 3i.$$

Les solutions de l'équation $f(z) = 0$ sont donc $\alpha = 2+i$ et $i\alpha = -1+2i$.

Partie B

1. $b = -1+2i = i^2 + 2i = i(i+2) = i\alpha$. $a = \alpha$ est l'affixe de A et b celle de B. L'égalité $a = ib$ donne en module $OA = OB$ et en argument $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2}$: le triangle OAB est donc rectangle isocèle en O.

2. Sans conjecture : le point D est l'image de C dans la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On a donc $d = ic = i\left(-1 + \frac{1}{2}i\right) = -\frac{1}{2} - i$.



On conjecture l'affixe de D à l'aide de la figure pour traiter la question suivante.
D(-0,5 ; -1)

3. L'affixe de M est $-1 + \frac{5}{4}i$. L'affixe du vecteur \overrightarrow{DA} est $\frac{5}{2} + 2i$.

$$\text{On a donc } \frac{z_{\overrightarrow{OM}}}{z_{\overrightarrow{DA}}} = \frac{-1 + \frac{5}{4}i}{\frac{5}{2} + 2i} = \frac{-4 + 5i}{10 + 8i} = \frac{i(4i + 5)}{2(4i + 5)} = \frac{1}{2}i.$$

4. L'égalité précédente entraîne que $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{2}$.

5. En prenant les modules des membres de l'égalité trouvée au 3. on obtient

$$\frac{OM}{DA} = \frac{1}{2} \iff OM = \frac{1}{2}DA.$$

6. On admet que le quadrilatère JKLM est un parallélogramme. Les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AC} sont $(-3; -\frac{1}{2})$, celles du vecteur \overrightarrow{BD} $(\frac{1}{2}; -3)$. On a $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

Or dans (ABC), (LM) est parallèle à (AC) (droite des milieux) et dans (ABD) (LK) est parallèle à (BD).

Conclusion : (LM) est perpendiculaire à (LK). Le parallélogramme (JKLM) ayant un angle droit est un rectangle. D'autre part $AC = \sqrt{\frac{1}{4} + 9} = \frac{\sqrt{37}}{2}$ et $BD = \sqrt{\frac{1}{4} + 9} = \frac{\sqrt{37}}{2}$.

$$\text{Donc } LM = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{37}}{4} \text{ et } LK = \frac{\sqrt{37}}{4}.$$

(JKLM) est un rectangle dont deux côtés consécutifs ont la même longueur : c'est un carré.

EXERCICE 2

5 points

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. a. $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ se traduit en termes d'affixes par : $m - a = t(b - a) \iff m = a + t(b - a)$.

$$\text{De même } \overrightarrow{BM} = t\overrightarrow{BC} \iff n = b + t(c - b) \text{ et } \overrightarrow{CP} = t\overrightarrow{CA} \iff p = c + t(a - c).$$

b. G centre de gravité du triangle ABC signifie que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \iff a - g + b - g + c - g = 0 \iff 3g = a + b + c$.

Or $m + n + p = a + b + c + t(b - a + c - b + a - c) = a + b + c = 3g'$ avec g' affixe du centre de gravité G' de (MNP). Donc $g = g'$ et ABC et MNP ont le même centre de gravité G.

c. Les images respectives de A, B et C par σ sont M, N et P. Comme la similitude conserve le barycentre, l'image de G par σ est le point G.

2. On considère la rotation r de centre G et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

a. $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AM} + t\overrightarrow{MB} \iff (1 - t)\overrightarrow{MA} + t\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ qui signifie que M est le barycentre du système de points $\{A(1 - t); B(t)\}$.

Par la rotation r l'image de A est B, celle de B est C. La rotation conserve le barycentre, donc $r(M)$ est barycentre du système $\{B(1 - t); C(t)\} = N$ d'après la première question.

On admet de même que $r(N) = P$ et $r(P) = M$.

b. Soit σ_1 , la similitude directe de centre G de rapport $\frac{GM}{GA}$ et d'angle $(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GM})$.

On a par définition $\overrightarrow{GA'} = \frac{GM}{GA}\overrightarrow{GA}$ qui se traduit

$$\text{– en prenant les modules par } GA' = \frac{GM}{GA} \times GA = GM;$$

$$\text{– en prenant les arguments par } (\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GA'}) = (\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GM})$$

Conclusion $A' = M$.

On démontre de même que $\sigma_1(B) = N$, $\sigma_1(C) = P$.

- c. Il existe donc une similitude transformant A et B en respectivement M et N .
 Comme il n'existe qu'une similitude transformant deux points distincts en deux points distincts, la similitude unique transformant A, B et C en M , N et P est la similitude σ .

EXERCICE 3**5 points****Commun à tous les candidats****Question de cours**

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0; 1]$.

On note f' la fonction dérivée de f .

On suppose que f' est continue sur l'intervalle $[0; 1]$.

Partie A

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0; 1]$.

On note f' la fonction dérivée de f .

On suppose que f' est continue sur l'intervalle $[0; 1]$.

1. On intègre par parties :

$$\int_0^1 f(x) dx = [xf(x)]_0^1 - \int_0^1 xf'(x) dx = f(1) - \int_0^1 xf'(x) dx$$

2. L'égalité précédente peut s'écrire :

$$\int_0^1 f(x) dx - f(1) = - \int_0^1 xf'(x) dx \iff \int_0^1 f(x) dx - f(1)(1-0) = - \int_0^1 f(x) dx \iff$$

$$\int_0^1 [f(x) - f(1)] dx = - \int_0^1 f(x) dx.$$

Partie B

$$f(x) = \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right).$$

1. On a $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$;

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$$

2. a. Par composition de fonctions dérivables, la fonction f est dérivable et : $f'(x) = \frac{4}{(2+x)(2-x)}$

$$\frac{u}{u'}, \text{ avec } u(x) = \frac{2+x}{2-x}; f'(x) = \frac{(2-x)^2}{2+x} = \frac{4}{(2+x)(2-x)} = \frac{4}{4-x^2}.$$

- b. Sur l'intervalle $] -2; 2[$, $x^2 < 4$, donc $4 - x^2 > 0$. La dérivée est positive, donc la fonction est croissante de $-\infty$ à $+\infty$, avec $f(0) = 0$.

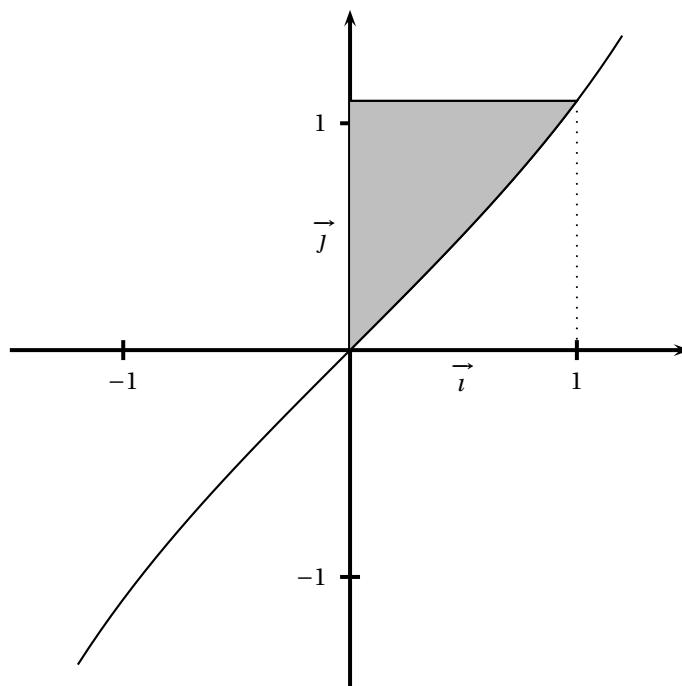
Partie C

$$\text{Aire}(\mathcal{D}) = f(1) \times 1 - \int_0^1 f(x) dx = \ln 3 + \int_0^1 xf'(x) dx - \ln 3 \text{ (en utilisant A. 1.)} = \int_0^1 \frac{4x}{4-x^2} dx.$$

$$\text{En posant } u(x) = 4 - x^2, u'(x) = -2x. \text{ On a donc } \frac{4x}{4-x^2} = -2 \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

$$\text{On a donc } \text{Aire}(\mathcal{D}) = -2 \left| \ln(4-x^2) \right|_0^1 = -2(\ln 3 - \ln 4) = 2(\ln 4 - \ln 3) = \ln\left(\frac{16}{9}\right).$$

Comme l'unité d'aire est égale à $2 \times 2 \text{ cm}^2$, on a $\text{Aire}(\mathcal{D}) = 4 \ln\left(\frac{16}{9}\right) \approx 2,3 \text{ cm}^2$ ce qui correspond sensiblement au dessin.

**EXERCICE 4****4 points****Commun à tous les candidats**Soit $v = (v_n)_{n \geq 0}$ une suite.On considère la suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = e^{-v_n} + 1$.**Partie A**

- $v_0 = \ln a$, alors : $u_0 = e^{-\ln a} + 1 = \frac{1}{e^{\ln a}} + 1 = \frac{1}{a} + 1$. Réponse a
- Si v est strictement croissante, alors : $-v$ est décroissante, e^{-v} est décroissante (car la fonction exponentielle est croissante) et $e^{-v} + 1$ l'est aussi et est minorée par 1 (au voisinage de $+\infty$). Réponse d.
- Si v diverge vers $+\infty$, alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-v_n} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$. Réponse c.
- Si v est majorée par 2, alors : $v_n \leq 2 \iff -2 \leq -v_n \iff e^{-2} \leq e^{-v_n} \iff e^{-2} + 1 \leq e^{-v_n} + 1$. Donc réponse b.

Partie B (1 point)Démontrer que pour tout entier naturel non nul, on a $\ln(u_n) + v_n > 0$.On a $u_n = \frac{1}{e^{v_n}} + 1 = \frac{1 + e^{v_n}}{e^{v_n}} > 0$.Donc $\ln(u_n) = \ln(1 + e^{v_n}) - \ln(e^{v_n}) = \ln(1 + e^{v_n}) - v_n \iff \ln(u_n) + v_n = \ln(1 + e^{v_n})$. Or $e^{v_n} > 0$, donc $\ln(1 + e^{v_n}) > \ln 1 = 0$.Autre méthode : quel que soit n , $1 + e^{v_n} > e^{v_n}$.Par croissance de la fonction \ln , on a $\ln(u_n) = \ln(1 + e^{-v_n}) > \ln(e^{-v_n}) = -v_n$; conclusion $\ln(u_n) + v_n > 0$.