

Durée : 4 heures

Correction du baccalauréat S Nouvelle-Calédonie  
novembre 2007

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

1. Avec  $z = x + iy$ ,  $2z + \bar{z} = 9 + i \iff 2x + 2iy + x - iy = 9 + i \iff 3x + iy = 9 + i$  et par identification  $x = 3$ ,  $y = 1$ .

Réponse c.

2. Par les différentes solutions possibles  $|z+i| = |\bar{z}-i|$  (deux complexes conjugués ont le même module;  $|\bar{z}-i| = |i| \times |\bar{z}-i| = |i(\bar{z}-i)| = |i\bar{z}-i^2| = |i\bar{z}+i|$ ).

Réponse c.

3. On pose  $z = re^{i\theta}$ ;  $-1 + i\sqrt{3} = 2 \left( -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ .

$$\text{Donc } \frac{-1 + i\sqrt{3}}{\bar{z}} = \frac{2e^{i\frac{2\pi}{3}}}{re^{i\theta}} = \frac{2}{r} e^{i(\frac{2\pi}{3} + \theta)}.$$

Réponse b.

4.  $\sqrt{3} + i = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ . Donc  $(\sqrt{3} + i)^n = 2^n e^{i\frac{n\pi}{6}}$  est un imaginaire pur si et seulement si un de ses arguments est égal à  $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ .

$$\text{Donc } \frac{n\pi}{6} = (2k+1)\frac{\pi}{2} \iff n = 6k+3.$$

Réponse b.

5.  $|z-i| = |z+1| \iff AM = BM$  donc  $M$  appartient à la médiatrice de  $[AB]$  qui est bien la perpendiculaire à  $[AB]$  contenant  $O$ .

Réponse c.

6.  $|z-1+i| = |3-4i| \iff \Omega M = 5$ . Les points appartiennent donc au cercle de centre  $\Omega$  et de rayon 5. Pour tout point  $M$  de ce cercle on a  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$  qui se traduit en termes d'affixes par  $z = 1 - i + 5e^{i\theta}$  avec  $\theta$  réel.

Réponse c.

7.  $C$  est l'image de  $B$  dans la rotation de centre  $A$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ . D'où  $c - a = i(b - a) \iff c = a + i(b - a) \iff c = 4 + i(3i - 4) = 1 - 4i$

Réponse a.

8.  $\frac{z-2}{z-1} = z \iff z-2 = z^2 - z$  (avec  $z \neq 1$ ) soit  $z^2 - 2z + 2 = 0$  On trouve les deux solutions  $1 - i$ ;  $1 + i$ .

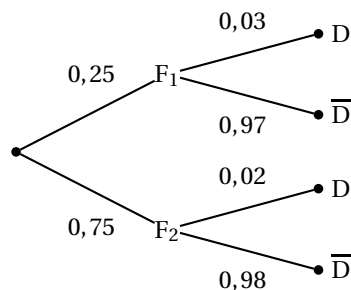
Réponse c.

EXERCICE 2

5 points

Commun à tous les candidats

1. a. Arbre pondéré.



**b.** Calculer  $p(D \cap F_1) = p(F_1 \cap D) = 0,25 \times 0,03 = 0,0075$ .

De même  $p(F_2 \cap D) = 0,75 \times 0,02 = 0,015$ .

Donc  $p(D) = p(F_1 \cap D) + p(F_2 \cap D) = 0,0075 + 0,015 = 0,0225$ .

**c.** On sait que  $p_D(F_1) = \frac{p(D \cap F_1)}{p(F_1)} = \frac{0,03}{0,09} = \frac{1}{3}$ .

**2.** La probabilité d'avoir  $k$  composants défectueux sur 20 est :

$p(X = k) = \binom{20}{k} 0,0225^k \times (1 - 0,0225)^{20-k}$ . (épreuve de Bernoulli avec  $n = 20$  et  $p = 0,0225$ .)

La probabilité d'avoir au moins deux composants défectueux est égale à :

$p(X \geq 2) = 1 - p(X = 0) - p(X = 1) = 1 - 0,9775^{20} - 20 \times 0,0225 \times 0,9775^{19}$ .

Donc  $p(X \geq 2) \approx 0,0736 \approx 0,074$ .

**3. a.** On sait que  $p(X > 5) = \int_5^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = [-e^{-\lambda t}]_5^{+\infty} = e^{-5\lambda} = 0,325$ .

Or  $e^{-5\lambda} = 0,325 \iff -5\lambda = \ln 0,325 \iff \lambda = \frac{-\ln 0,325}{5} \approx 0,2247 \approx 0,225$ .

**b.**  $p(X < 8) = 1 - p(X \geq 8) = 1 - \int_8^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-0,225 \times 8} \approx 0,835$ .

D'où  $p(X \geq 8) = 1 - p(X < 8) \approx 1 - 0,835 \approx 0,165$

**c.** La loi étant sans vieillissement la probabilité est  $p(X > 5) = 0,325$ .

### EXERCICE 3

**6 points**

**Commun à tous les candidats**

#### Partie B

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

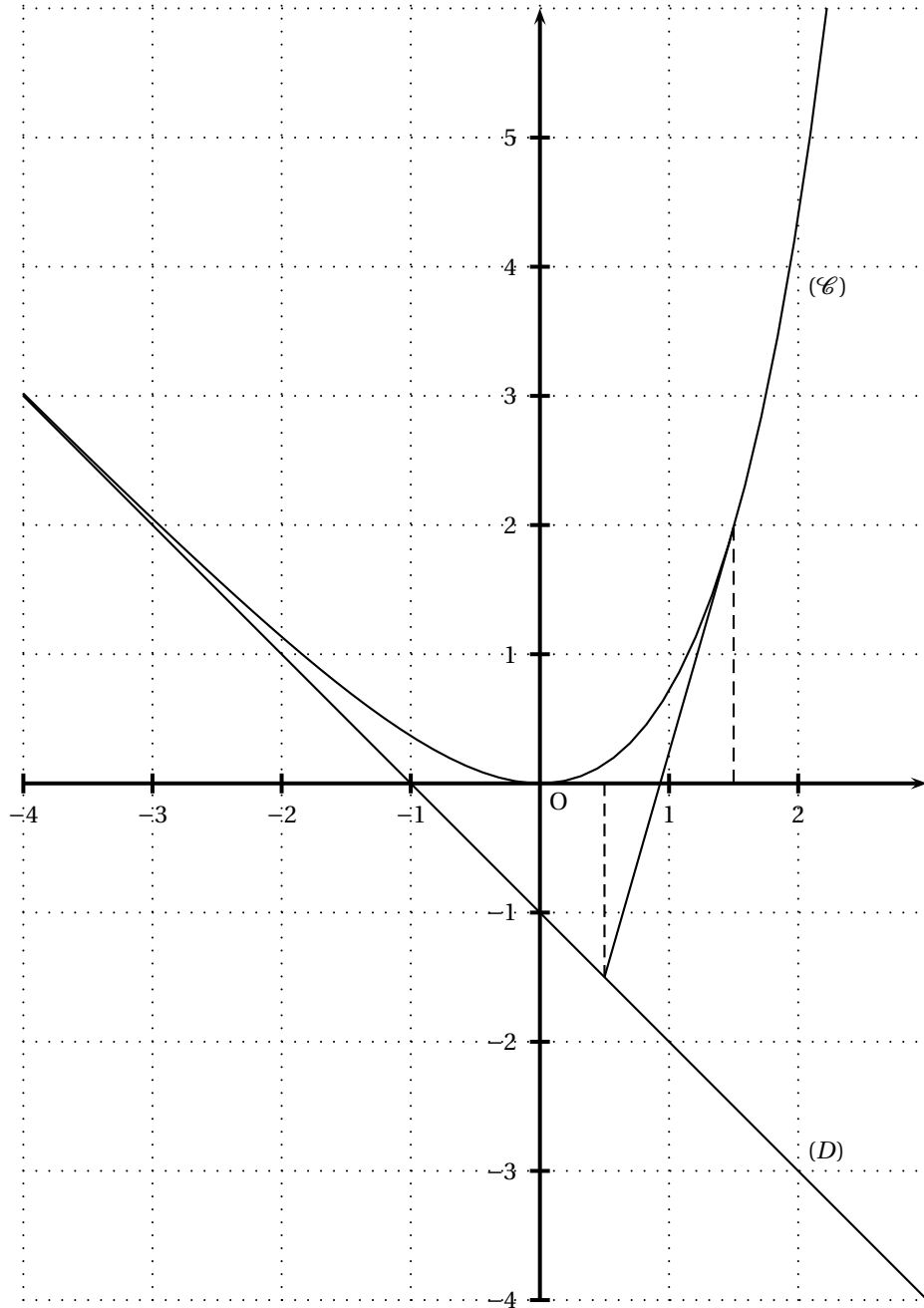
$$f(x) = e^x - x - 1$$

et soit  $(\mathcal{C})$  sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan. La droite  $(D)$  d'équation  $y = -x - 1$  est asymptote à  $(\mathcal{C})$ . On a représenté sur la feuille annexe la courbe  $(\mathcal{C})$  et la droite  $(D)$ .

**1.** Pour  $M \neq A$ ,  $M(X; Y) \in (T) \iff \frac{Y - f(a)}{X - a} = f'(a) \iff \frac{Y - e^a + a + 1}{X - a} = e^a - 1 \iff Y - e^a + a + 1 = (X - a)(e^a - 1) \iff Y = e^a - a - 1 - ae^a + a + X(e^a - 1) \iff Y = X(e^a - 1) + e^a(1 - a) - 1$ .

**2.** Cette tangente  $(T)$  coupe la droite  $(D)$  au point  $N(X; Y) \iff Y = -X - 1 = X(e^a - 1) + e^a(1 - a) - 1 \iff Xe^a = e^a(a - 1) \iff X = a - 1 \iff b - a = -1$ .

**3.** Pour construire la tangente  $(T)$  à  $(\mathcal{C})$  au point  $M$  d'abscisse  $a$ , il suffit de construire le point de  $(D)$  d'abscisse  $a - 1$  et la tangente est obtenue en joignant ce point à  $M$ . Exemple ci-dessous avec  $a = 1,5$ .



### Partie C

1. Graphiquement on lit  $f(x) \geq 0$  ( $f(0) = 0$ ).

2. On a donc quel que soit  $x \in \mathbb{R}$ ,  $e^x \geq x + 1$ .

En appliquant cette inégalité à  $x = \frac{1}{n}$ , on obtient (1)  $e^{\frac{1}{n}} \geq 1 + \frac{1}{n}$  et en l'appliquant à  $x = -\frac{1}{n+1}$  on obtient (2)  $e^{-\frac{1}{n+1}} \geq 1 - \frac{1}{n+1}$ .

3. La fonction  $x \mapsto x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  étant croissante (1)  $\Rightarrow \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \Leftrightarrow e \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$ .

4. De même (2)  $\Rightarrow \left(e^{-\frac{1}{n+1}}\right)^{n+1} \geq \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \Leftrightarrow e^{-1} \geq \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \geq e \Leftrightarrow e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

5. 3. montre que  $e$  majore  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ .

$$4. \text{ s'écrit } e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \times \left(1 + \frac{1}{n}\right) \Leftrightarrow e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \times \left(\frac{n+1}{n}\right) \Leftrightarrow \frac{n}{n+1}e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

On obtient donc l'encadrement :

$$\frac{n}{n+1}e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e.$$

Par application du théorème des « gendarmes », car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

#### EXERCICE 4

5 points

#### Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. a. La droite (OH) étant orthogonale au plan (ABC) est orthogonale à toute droite de ce plan, donc à la droite (BC).

La droite (OA) perpendiculaire à (OB) et à (OC) est orthogonale au plan (OBC) ; elle est donc orthogonale à toute droite de ce plan et en particulier à (BC).

$$b. \text{ Soit } \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OH}) \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 + 0 = 0.$$

Conclusion : les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.

c. D'après la question précédente (AH) est hauteur du triangle (ABC), de même que (BH) et (CH), donc H est l'orthocentre du triangle (ABC).

2. a. Soit  $ax + by + cz = d$  une équation du plan (ABC).

En écrivant que A, B et C ont des coordonnées qui vérifient cette équation, on obtient  $a = d$ ,  $2b = d$  et  $3c = d$ . En prenant  $d = 6$ , on obtient une équation :  $M(x; y; z) \in (ABC) \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z = 6$

b. La question précédente montre qu'un vecteur normal à (ABC) est  $\vec{n}(6; 3; 2)$ .

$$\text{Donc } M(x; y; z) \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = t\vec{n}, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6t \\ y = 3t \\ z = 2t \end{cases}$$

$$c. H(x; y; z) \in (D) \cap (ABC) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6t \\ y = 3t \\ z = 2t \\ 6x + 3y + 2z = 6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$36t + 9t + 4t = 6 \Leftrightarrow t = \frac{6}{49}.$$

$$\text{Donc H a pour coordonnées } \left(\frac{36}{49}; \frac{18}{49}; \frac{12}{49}\right).$$

3. a. La distance du point O au plan (ABC) est la plus courte distance de O au plan (ABC) : c'est donc OH.

$$\text{On a } OH^2 = \left(\frac{36}{49}\right)^2 + \left(\frac{18}{49}\right)^2 + \left(\frac{12}{49}\right)^2 = \frac{1764}{49^2} = \frac{42^2}{49^2}.$$

$$\text{Conclusion } OH = \frac{42}{49} = \frac{6}{7}.$$

$$\text{b. On a (1) } \mathcal{V}(\text{OABC}) = \frac{\mathcal{A}(\text{ABC}) \times \text{OH}}{3} = \frac{\mathcal{A}(\text{OAB}) \times \text{OC}}{3}.$$

Or (OAB) est un triangle rectangle dont l'aire est égale à 1 et  $\text{OC} = 3$ .

$$\text{On a donc (1) } \iff \frac{\mathcal{A}(\text{ABC}) \times \frac{6}{7}}{3} = 1 \iff \mathcal{A}(\text{ABC}) = \frac{7}{2}.$$

$$\text{c. } \mathcal{A}(\text{OAB})^2 + \mathcal{A}(\text{OAC})^2 + \mathcal{A}(\text{OBC})^2 = 1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3^2 = 1 + \frac{9}{4} + 9 = \frac{49}{4} = \left(\frac{7}{2}\right)^2.$$

Donc le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des autres faces de ce tétraèdre.

**EXERCICE 4****5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

$$\text{1. a. On a } 6^2 = 36 \equiv 3 \pmod{11}, \text{ donc } (6^2)^5 \equiv 3^5 \pmod{11} \text{ ou encore } 6^{10} \equiv 1 \pmod{11} \text{ car } 3^5 = 243 = 11 \times 22 + 1.$$

Le reste de la division euclidienne de  $6^{10}$  par 11 est donc 1.

$$\text{b. } 6^2 \equiv 1 \pmod{5}, \text{ donc } 6^4 \equiv 1 \pmod{5}.$$

Le reste de la division euclidienne de  $6^4$  par 5 est 1.

$$\text{c. On a vu que } 6^{10} \equiv 1 \pmod{11}, \text{ donc } (6^{10})^4 \equiv 1^4 = 1 \pmod{11}. \text{ De même } 6^4 \equiv 1 \pmod{5}, \text{ donc } (6^4)^{10} = 6^{40} \equiv 1^{10} = 1 \pmod{5}; \text{ donc } 6^{40} \equiv 1 \pmod{5}.$$

d. Les questions précédentes montrent que  $6^{40} - 1$  est un multiple de 11 et de 5, donc de  $511 \times 5 = 55$  qui sont premiers entre eux.

2. Dans cette question  $x$  et  $y$  désignent des entiers relatifs.

a. 65 et 40 sont multiples de 5, donc  $65x - 40y$  l'est aussi, alors que 1 ne l'est pas.

Conclusion : l'équation  $65x - 40y = 1$  n'a pas de solution dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

b. 17 et 40 sont premiers entre eux. Il existe donc au moins un couple  $(u; v)$  tel que  $17u - 40v = 1$ .

c. On a

$$40 = 17 \times 2 + 6 \quad (1)$$

$$17 = 6 \times 2 + 5 \quad (2)$$

$$6 = 5 \times 1 + 1. \quad (3)$$

D'où

$$1 = 6 - 5 \quad (4)$$

$$1 = 6 - (17 - 2 \times 6) = -17 + 3 \times 6 \quad (5)$$

$$1 = -17 + 3(40 - 2 \times 17) = 3 \times 40 - 7 \times 17. \quad (6)$$

La dernière égalité peut s'écrire  $17 \times (-7) - 3 \times (-40) = 1$ , qui montre que le couple  $(-7; -3)$  est solution de l'équation  $(E')$ .

$$\text{d. On a le système } \begin{cases} 17x - 40y & = & 1 \\ 17 \times (-7) - 40 \times (-4) & = & 1 \end{cases} \Rightarrow \text{par différence)}$$

$$17(x+7) - 40(y+4) = 0 \iff 17(x+7) = 40(y+4) \quad (7).$$

Or on a vu que 17 et 40 sont premiers entre eux : d'après le théorème de Gauss 40 divise  $17(x+7)$  et est premier avec 17, il divise donc  $x+7$ . Il existe donc  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $x+7 = 40k \iff x = -7 + 40k$ .

En reportant dans (7) et en simplifiant par 40, on obtient  $17k = y+4 \iff y = -4 + 17k$ .

Les solutions de  $(E')$  sont donc tous les couples  $(-7+40k; -4+17k)$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

Soit un couple  $(x ; y)$  solution de  $(E')$ . Si  $x \in \mathbb{N}$  et  $x < 40$ , alors  $0 < -7 + 40k < 40 \iff 7 < 40k < 47 \Rightarrow 0 < k < 2$ .

Il y a une seule solution  $k = 1$  qui donne  $x_0 = 33$ .

Effectivement :  $17 \times 33 = 561 = 40 \times 14 + 1$ .

3.  $a^{17} \equiv b \pmod{55} \Rightarrow (a^{17})^{33} \equiv b^{33} \pmod{55} \iff a^{17 \times 33} \equiv b^{33} \pmod{55}$ .

D'après la question précédente  $17 \times 33 - 1 = 40 \times 14$ , donc  $a^{17 \times 33} = a^{40 \times 14 + 1} \pmod{55} \iff a^{40 \times 14} \times a \equiv b^{33} \pmod{55}$ .

Or  $a^{40} \equiv 1 \pmod{55} \Rightarrow a^{40 \times 14} \equiv 1 \pmod{55}$ .

Conclusion :  $a \equiv b^{33} \pmod{55}$