

Durée : 3 heures

⌘ Baccalauréat ES Amérique du Nord 1^{er} juin 2005 ⌘

EXERCICE 1

3 points

Commun tous les candidats

Les deux questions sont indépendantes.

Les résultats seront arrondis à 10^{-2} .

Le gouvernement d'un pays envisage de baisser un impôt de 30% en cinq ans.

1. On suppose que le pourcentage de baisse est le même chaque année.
Vérifier que ce pourcentage de baisse annuel est alors égal à environ 6,89%.
2. La première année cet impôt baisse de 5%, la deuxième année la baisse est de 1% et la troisième année de 3%.
 - a. Quelle est la baisse, en pourcentage, de cet impôt au terme de ces trois premières années ?
 - b. Pour atteindre son objectif quel pourcentage annuel de baisse doit décider ce gouvernement, en supposant que ce pourcentage est le même sur les deux dernières années ?

EXERCICE 2

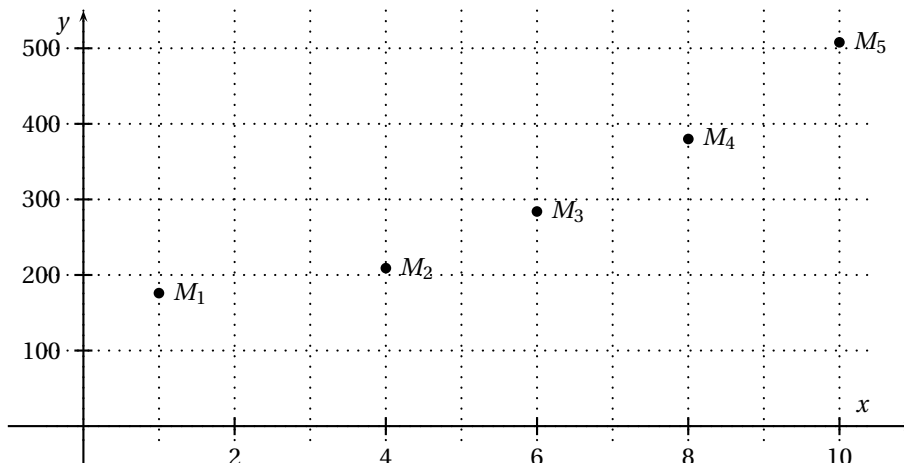
5 points

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le tableau suivant donne l'évolution du chiffre d'affaires (C.A.), en millions d'euros, sur la période 1994-2003.

| | | | | | |
|------------|------|------|------|------|------|
| Année | 1994 | 1997 | 1999 | 2001 | 2003 |
| Rang x_i | 1 | 4 | 6 | 8 | 10 |
| C.A. y_i | 176 | 209 | 284 | 380 | 508 |

1. Le nuage de points $M_i(x_i ; y_i)$ est représenté ci-dessous dans un repère orthogonal. Un ajustement affine semble-t-il adapté ?



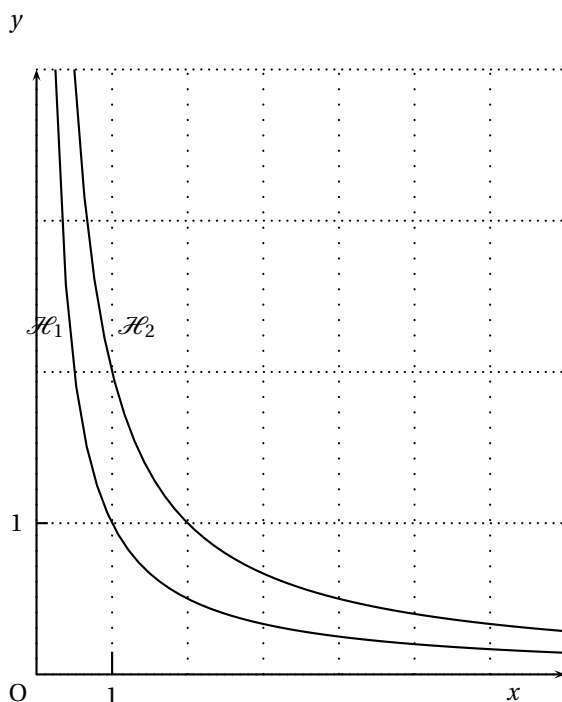
2. On pose $z_i = \ln y_i$.
 - a. Calculer, en arrondissant à 10^{-2} près, pour i variant de 1 à 5, les valeurs z_i , associées aux rangs x_i du tableau.

- b. Construire le nuage de points $N_i(x_i ; z_i)$ dans le repère orthogonal suivant :
- sur l'axe des abscisses, on placera O à l'origine et on choisira 1 cm pour représenter 1 année,
 - sur l'axe des ordonnées, on placera 5 à l'origine et on choisira 1 cm pour représenter le nombre 0,1.
3. a. Déterminer avec la calculatrice une équation de la droite d d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés (coefficients arrondis à 10^{-3} près) et tracer la droite d dans le repère précédent.
- b. En déduire une relation entre y et r de la forme $y = A \times k^x$. (arrondir A à l'entier près et k à 10^{-2} près)
4. a. Tracer la droite d dans le même repère que celui du nuage de points (N_i).
- b. Donner une estimation, arrondie au millier d'euros, du chiffre d'affaires en 2005.
- c. À partir de quelle année peut-on prévoir que le chiffre d'affaires sera supérieur à 1 milliard d'euros ?

EXERCICE 2

5 points

Pour les candidats ayant suivi la spécialité mathématique



Les courbes \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 représentées dans le repère orthonormal ci-dessus ont respectivement pour équation

$$y = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad y = \frac{2}{x}.$$

On note \mathcal{D}_2 le domaine délimité par les courbes \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 3$.

On note \mathcal{D}'_2 le domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe \mathcal{H}_1 et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 3$.

1. Colorier les domaines \mathcal{D}_2 et \mathcal{D}'_2 d'une couleur différente et montrer qu'ils ont la même aire.
Soit n un entier naturel strictement positif. On note u_n l'aire du domaine \mathcal{D}_n délimité par les courbes \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 et les droites d'équation $x = n$ et $x = n + 1$.
2. Exprimer u_n en fonction de n .
3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
On pourra comparer les nombres $n(n + 2)$ et $(n + 1)^2$.
4. Étudier la convergence de la suite (u_n) .
5. Déterminer la plus grande valeur de n telle que l'aire du domaine \mathcal{D}_n reste supérieure à $\frac{1}{10}$ d'unité d'aire. Soit N cette valeur.
6. Calculer l'aire du domaine délimité par les courbes \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 et les droites d'équation $x = 1$ et $x = N$.

EXERCICE 3**6 points****Commun à tous les candidats**

Pour chacune des questions ci-dessous, une seule des réponses proposées est exacte.

L'exercice consiste à cocher cette réponse exacte sans justification.

Barème : Une bonne réponse rapporte 1 point ; une mauvaise réponse enlève 0,5 point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.

Si le total de points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.

COMPLÉTER LE DOCUMENT RÉPONSE DONNÉ EN ANNEXE

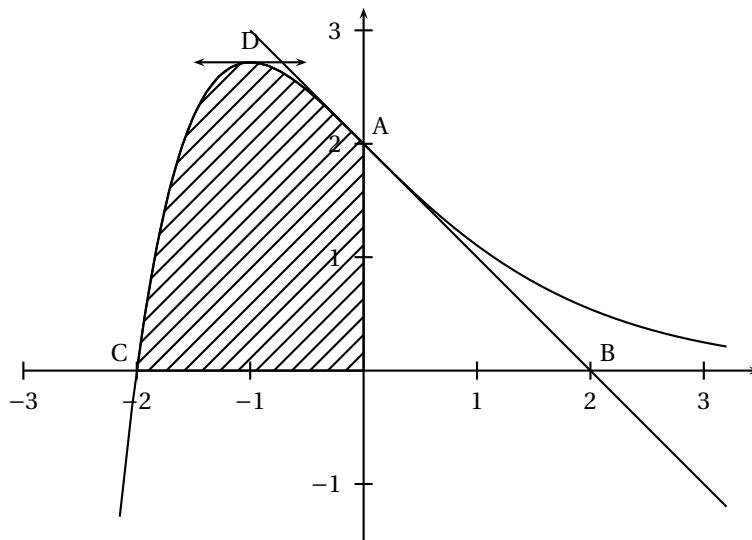
| QUESTIONS | RÉPONSES |
|---|---|
| <p>1. Soit une série statistique à deux variables $(x; y)$. Les valeurs de x sont 1, 2, 5, 7, 11, 13 et une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés est $y = 1,35x + 22,8$. Les coordonnées du point moyen sont :</p> | <input type="checkbox"/> (6,5 ; 30,575) <input type="checkbox"/> (32, 575 ; 6,5) <input type="checkbox"/> (6,5 ; 31,575) |
| <p>2. (u_n) est une suite arithmétique de raison -5. Laquelle de ces affirmations est exacte ?</p> | <input type="checkbox"/> Pour tout entier n , $u_{n+1} - u_n = 5$ <input type="checkbox"/> $u_{10} = u_2 + 40$ <input type="checkbox"/> $u_3 = u_7 + 20$ |
| <p>3. L'égalité $\ln(x^2 - 1) = \ln(x - 1) + \ln(x + 1)$ est vraie</p> | <input type="checkbox"/> Pour tout x de $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ <input type="checkbox"/> Pour tout x de $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$. <input type="checkbox"/> Pour tout x de $]1; +\infty[$ |
| <p>4. Pour tout réel x, le nombre $\frac{e^x - 1}{e^x + 2}$ égal à :</p> | <input type="checkbox"/> $-\frac{1}{2}$ <input type="checkbox"/> $\frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 2}$ <input type="checkbox"/> $\frac{1 - e^{-x}}{1 + 2e^{-x}}$ |
| <p>5. On pose $I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{1}{e^x - 1} dx$ et $J = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x - 1} dx$ alors le nombre $I - J$ est égal à</p> | <input type="checkbox"/> $\ln \frac{2}{3}$ <input type="checkbox"/> $\ln \frac{3}{2}$ <input type="checkbox"/> $\frac{3}{2}$ |
| <p>6. L'ensemble des solutions de l'inéquation $\left(1 - \frac{2}{100}\right)^x \leq 0,5$ est</p> | <input type="checkbox"/> $S = \left[-\infty; \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,98)}\right)$ <input type="checkbox"/> $S = \left[\frac{\ln(0,5)}{\ln(0,98)}; +\infty\right)$ <input type="checkbox"/> $S = \left[\ln \frac{0,5}{0,98}; +\infty\right)$ |

EXERCICE 4

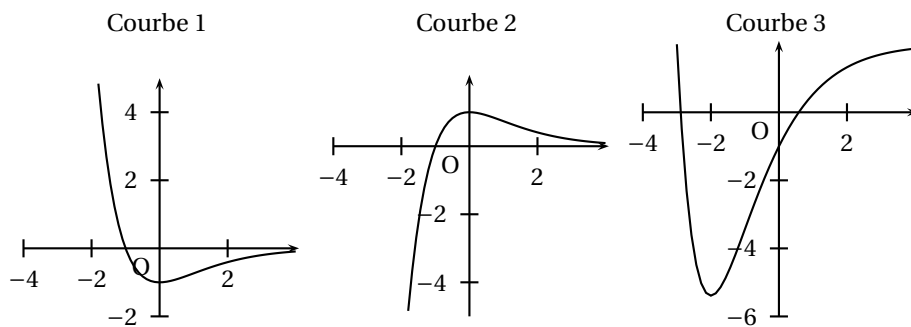
6 points

Commun à tous les candidats

On a représenté ci-dessous la courbe représentative Γ , dans un repère orthonormal, d'une fonction f définie sur \mathbb{R} . La courbe Γ passe par les points $A(0; 2)$ et $C(-2; 0)$ et la droite (AB) est la tangente en A à Γ . La tangente à Γ en son point D d'abscisse -1 est parallèle à l'axe des abscisses.



1. Parmi les trois représentations graphiques ci-dessous, une représente la fonction dérivée f' de f et une autre représente une primitive F de f sur \mathbb{R} .



Déterminer la courbe associée à la fonction f' et celle qui est associée à la fonction F .

Vous expliquerez avec soin les raisons de votre choix

2. **a.** Déterminer, à l'aide des renseignements fournis par l'énoncé, les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.
- b.** On suppose que $f(x)$ est de la forme $f(x) = (x+K)e^{\alpha x}$ où K et α sont des constantes réelles.
Calculer $f'(x)$, puis traduire les renseignements trouvés à la question précédente par un système d'équations d'inconnues K et α .
En déduire que f est définie par $f(x) = (x+2)e^{-x}$.
3. **a.** Montrer que la fonction φ définie par $\varphi(x) = (-x-3)e^{-x}$ est une primitive de f .
- b.** En déduire la valeur de l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface hachurée.
On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième du résultat.